Analyse 1A Eco - Corrigé des exercices traités en cours: TD1

Etienne Donier-Meroz - Antoine Roche

25 septembre 2026

Corrigé des exercices 1, 2, 3, 5, 6 et 8.

Exercice 1

Posons $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$, de sorte que $d(u, v) = \varphi(|u-v|)$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}$. On veut montrer que les axiomes de distance sont vérifiés, à cet escient deux propriétés de φ vont nous permettre de conclure :

— φ est croissante sur $[0, +\infty[$: dérivable et $\varphi'(t) = \dfrac{(1+t)-t}{(1+t)^2} = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0$.

— φ est sous-additive : pour tous $a, b \geqslant 0$,

$$\varphi(a+b) = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$(1 + a + b \geqslant 1 + a > 0$ et $1 + a + b \geqslant 1 + b > 0)$.

Vérification des axiomes de distance. Soient $u, v, w \in \mathbb{R}$.

(i) *Positivité et bonne définition.* φ est clairement positive.

(ii) *Séparation.* $d(u, v) = 0 \iff |u - v| = 0 \iff u = v$ (car $\varphi(t) = 0 \iff t = 0$).

(iii) *Symétrie.* $d(u, v) = \varphi(|u - v|) = \varphi(|v - u|) = d(v, u)$.

(iv) *Inégalité triangulaire.* C'est la seule difficulté réelle de l'exercice et c'est pour montrer cette propriété qu'on a montré les propriétés de φ. Par l'inégalité triangulaire pour $|\cdot|$, $|u - w| \leqslant |u - v| + |v - w|$. La croissance de φ puis sa sous-additivité donnent

$$d(u, w) = \varphi(|u - w|) \leqslant \varphi\big(|u - v| + |v - w|\big) \leqslant \varphi(|u - v|) + \varphi(|v - w|) = d(u, v) + d(v, w).$$

Ainsi d est une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On note $E =]0, +\infty[$ et $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, et donc $\delta(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

1. δ est une distance sur E

Soient $x, y, z \in E$. Tout d'abord pas de problème de définition de δ car $x, y \neq 0$.

(i) *Positivité.* $\delta(x, y) = |f(x) - f(y)| \geqslant 0$,

(ii) *Séparation.* $\delta(x, y) = 0 \iff f(x) = f(y) \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \iff x = y$, ($f$ est injective sur E).

(iii) *Symétrie.* $\delta(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = \delta(y, x)$.

(iv) *Inégalité triangulaire.*

$$\delta(x,z) = |f(x) - f(z)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = \delta(x,y) + \delta(y,z).$$

Donc δ est une distance sur E (en fait on compose à droite la distance usuelle par une application injective, ici l'application f injective sur E).

2. La boule $B(1,1)$

Pour $x \in E$:

$$\delta(1,x) < 1 \iff \left|\frac{1}{x} - 1\right| < 1 \iff -1 < \frac{1}{x} - 1 < 1 \iff 0 < \frac{1}{x} < 2.$$

L'inégalité $\frac{1}{x} > 0$ est automatique puisque $x > 0$, et $\frac{1}{x} < 2 \iff x > \frac{1}{2}$. Donc

$$B(1,1) = \left]\tfrac{1}{2}, +\infty\right[.$$

3. La partie $A =]0,1]$ est-elle bornée ?

Il faut d'abord bien garder la définition de ce qu'est une partie bornée pour une distance en tête, en effet, si la partie A est bornée pour la distance δ, alors pour tout $x, y \in A$, $\delta(x,y) \leqslant M$ pour un certain $M \geqslant 0$ universel. Ici, par la structure de la distance, on imagine que si on fixe un premier élément $x \in A$ et que l'on regarde sa distance $\delta(x,a)$ à un certain a qui est "petit" (proche de 0), alors en prenant l'inverse de a, la distance devient très grande. Cela donne l'idée de fixer $x = 1 \in A$ (par exemple, n'importe quel élément fixé dans $]0,1]$ fonctionne), et de prendre une suite d'éléments de A, que je note ε_n qui tend vers 0. Concrètement :
En effet, pour tout $n \geqslant 1$, si l'on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{n} \in A$, alors

$$\delta\left(1, \frac{1}{n}\right) = |1 - n| = n - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

On arrive donc à trouver deux éléments de A qui peuvent être à une distance arbitrairement grande l'un de l'autre. Le diamètre de A est donc infini : A n'est contenue dans aucune boule de (E,δ), ellen'est pas bornée pour δ.

4. Les boules ouvertes pour δ

Soient $a \in E$ et $r > 0$. Pour $x \in E$:

$$\delta(a,x) < r \iff \frac{1}{a} - r < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} + r,$$

il faut noter que l'on a toujours $\frac{1}{x} > 0$ car x est dans E.

Cas 1 : $r < \frac{1}{a}$. Alors $\frac{1}{a} - r > 0$ eten inversant etc... (attention aux inversions d'inégalités !) on trouve

$$B(a,r) = \left]\frac{1}{\frac{1}{a} + r}, \frac{1}{\frac{1}{a} - r}\right[= \left]\frac{a}{1 + ar}, \frac{a}{1 - ar}\right[.$$

Cas 2 : $r \geqslant \frac{1}{a}$. Alors $\frac{1}{a} - r \leqslant 0 < \frac{1}{x}$ pour tout $x \in E$: la contrainte de gauche est automatiquement vérifiée et

$$B(a,r) = \left]\frac{a}{1 + ar}, +\infty\right[.$$

dans ce cas là seulement la contrainte $1/x < 1/a + r$ fait effet.

On vient de montrer que l'ensemble des boules ouvertes pour δ que je note $\mathcal{B}_\delta$ est inclus dans l'ensemble des intervalles ouverts de E avec pour bord droit potentiellement $+\infty$, i.e.

$$\mathcal{B}_\delta \subseteq \{]\alpha,\beta[, (\alpha,\beta) \in E \times (E \cup \{+\infty\})\}\,.$$

Pour avoir un argument complet on doit montrer la réciproque, i.e. prendre un intervalle ouvert quelconque de E (pour la distance usuelle) de la forme $]\alpha,\beta[$ et montrer que c'est un ouvert pour la distance δ.

Réciproquement, soit $\alpha,\beta \in E$ avec $\alpha,\beta < +\infty$

— si $0 < \alpha < \beta < +\infty$, en posant $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ et $r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right) > 0$, on a $r < \frac{1}{a}$ et $B(a,r) =]\alpha,\beta[$; On trouve ces valeurs de a et r en posant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}\alpha = \frac{a}{1+ar}\\ \beta = \frac{a}{1-ar}\end{cases} \iff \begin{cases}a = \alpha(1+ar)\\ a = \beta(1-ar)\end{cases} \iff \begin{cases}r = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\\ \frac{a}{\beta} = 2-\frac{a}{\alpha}\end{cases} \iff \begin{cases}r = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a}\\ \frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)\end{cases}$$

— si $\alpha > 0$, en posant $a = 2\alpha$ et $r = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{a}$, on a $B(a,r) =]\alpha,+\infty[$.

Les boules ouvertes de (E,δ) sont donc exactement les intervalles ouverts $]\alpha,\beta[$ avec $0 < \alpha < \beta \leqslant +\infty$. On peut dire que δ et $|\cdot|$ induisent la même topologie sur E.

Exercice 3 : intérieur, adhérence et frontière de parties de $\mathbb{R}$

1. $A = \mathbb{N}$

Intérieur. $\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$: soient $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$; le réel $b = n + \frac{\min(r,1)}{2}$ appartient à $B(n,r)$ mais pas à $\mathbb{N}$ (il est strictement compris entre n et $n+1$). Aucune boule centrée en un point de $\mathbb{N}$ n'est incluse dans $\mathbb{N}$.

Adhérence. $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$: le complémentaire $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N} =]-\infty,0[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n,n+1[$ est une réunion d'ouverts, donc un ouvert ; ainsi $\mathbb{N}$ est fermé et égal à son adhérence.

Frontière. $\partial\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}} \setminus \mathring{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

2. $A =]-1,1] \setminus \{0\} =]-1,0[\cup]0,1]$

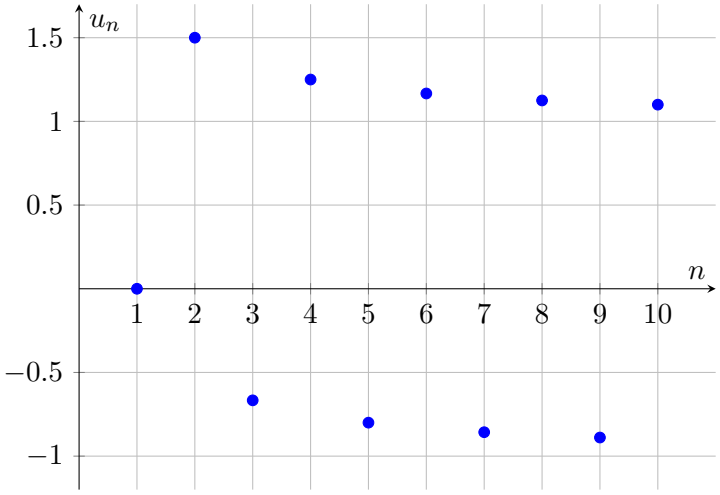
Intérieur. $\mathring{A} =]-1,0[\cup]0,1[$. En effet $]-1,0[\cup]0,1[$ est un ouvert inclus dans A, donc inclus dans $\mathring{A}$. Réciproquement, $1 \notin \mathring{A}$ car pour tout $r > 0$ le point $1 + \frac{r}{2} \in B(1,r)$ n'appartient pas à A ; et $\mathring{A} \subseteq A$ ne contient ni 0, ni -1, qui ne sont pas dans A.

Adhérence. $\overline{A} = [-1,1]$. D'une part $A \subseteq [-1,1]$ qui est fermé, donc $\overline{A} \subseteq [-1,1]$. D'autre part $-1 = \lim_n \left(-1+\frac{1}{n}\right)$ et $0 = \lim_n \frac{1}{n}$ avec $-1+\frac{1}{n} \in A$ et $\frac{1}{n} \in A$ pour n assez grand, donc $-1, 0 \in \overline{A}$; comme $\overline{A}$ contient $A \cup \{-1,0\} \supseteq]-1,1] \cup \{-1\} = [-1,1]$, on conclut.

Frontière. $\partial A = [-1,1] \setminus \big(]-1,0[\cup]0,1[\big) = \{-1,0,1\}$.

3. $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \geqslant 1\right\}$

Notons $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Pour n pair, $a_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$; pour n impair, $a_n = -1 + \frac{1}{n} \to -1$.



Intérieur. $\mathring{A} = \emptyset$: A est dénombrable, alors que toute boule ouverte non vide de $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert non vide, donc non dénombrable ; aucune boule ouverte n'est incluse dans A. On peut retrouver ça en appliquant la définition, si on prend $x \in \mathring{A}$ et $\varepsilon > 0$ alors pour avoir $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ il faut que pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, on ait pour tout y tel que $|y - (-1)^{n_0}\frac{1}{n_0}| < \varepsilon$, $y \in A$, cela implique qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ non dénombrable est inclus dans A ce qui contredit la dénombrabilité.

Adhérence. $\overline{A} = A \cup \{-1, 1\}$.
$\supseteq$ *:* $A \subseteq \overline{A}$, et -1 et 1 sont limites de suites d'éléments de A ($a_{2n+1} \to -1$, $a_{2n} \to 1$), donc appartiennent à $\overline{A}$.
$\subseteq$ *:* soit $x \notin A \cup \{-1, 1\}$. Si on pose $\varepsilon_1 = \min(|x + 1|, |x - 1|) > 0$ et qu'on prend choisissons $N \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Pour $n \geqslant N$, on a $|a_n - (-1)^n| = \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon_1}{2}$, donc

$$|x - a_n| \geqslant |x - (-1)^n| - |a_n - (-1)^n| \geqslant \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Si aussi on pose $\varepsilon_2 := \min_{1 \leqslant n < N} |x - a_n| > 0$ car $x \notin A$ et il n'y a qu'un nombre fini de tels indices. En posant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2) > 0$, on obtient $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, donc $x \notin \overline{A}$.

Une autre preuve : On peut obtenir le résultat d'une autre manière potentiellement plus simple (sans ε), si on note

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{u_n\}$$

l'ensemble des valeurs d'une suite donnée, on peut montrer le lemme (qui découle directement du cours) suivant :

Lemma 0.1. *Pour un ensemble de la forme de A (ensemble des valeurs d'une suite), on a*

$$\bar{A} = A \cup L$$

où L est défini comme l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (u_n), i.e.

$$L = \left\{l,\ \textit{il existe une extractrice } \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \textit{ strictement croissante}, u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} l\right\}$$

La preuve découle du cours car $\subseteq$ vient par définition : $A \subseteq \bar{A}$ et $L \subseteq \bar{A}$ car L contient des limites de suites d'éléments de A. Pour $\supseteq$, soit $x \in \bar{A}$, par la proposition 25 du cours si $x \in \bar{A}$ alors il existe une suite d'élément de A qui converge vers x, on distingue 2 possibilités :

— si $x \in A$ alors $x \in A \cup L$

— si $x \notin A$, alors puisque $x \in \bar{A}$ il existe une suite $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, on peut extraire de $(\varphi(n))$ une suite $(\psi(n))$ strictement croissante autrement $(\varphi(n))$ ne prendrait qu'un nombre fini de valeur et puisque $u_{\varphi(n)} \in A$ pour tout n, on aurait la limite $x \in \{u_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\} \subset A$ ce qui est absurde. Donc x est la limite de la suite extraite $(u_{\psi(n)})_n$ et appartient donc à L, ainsi $x \in A \cup L$.

Dans notre cas il suffit juste de déterminer l'ensemble L, soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (extractrice) telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, il reste à montrer que $x \in \{-1, 1\}$ on a

$$|x_{\varphi(n)}| = |(-1)^{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = |x| \implies x \in \{-1, 1\}$$

Frontière. $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \cup \{-1, 1\}$.

Exercice 5 : intérieur d'un sous-espace vectoriel

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel non vide de E.

1. Si $\mathring{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$

Supposons $\mathring{F} \neq \emptyset$ et fixons $x_0 \in \mathring{F}$: il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subseteq F$. Notons que $x_0 \in F$.

Étape 1 : On montre d'abord que $B(0, r) \subseteq F$. Soit $y \in E$ avec $\|y\| < r$ (donc $y \in B(0, r)$). Alors $\|(x_0 + y) - x_0\| = \|y\| < r$, donc $x_0 + y \in B(x_0, r) \subseteq F$. Or on sait que F est un sous-espace vectoriel contenant x_0 et donc si $x_0 + y \in F$ alors $y = x_0 + y - x_0 \in F$. On en déduit $B(0, r) \subseteq F$.

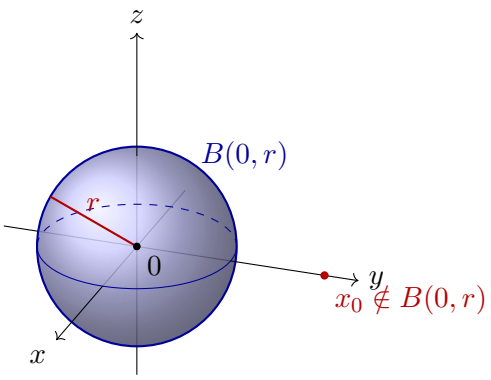


FIGURE 1 – La boule ouverte $B(0, r)$ dans $\mathbb{R}^3$, si elle est inclue dans F, alors on peut la dilater en faisant grandir son rayon autant qu'on veut pour "englober tout $\mathbb{R}^3$ et donc inclure x_0 qui est en dehors.

Étape 2 : $E \subseteq F$. Soit $z \in E$ (de norme quelconque donc). Si $z = 0$, alors $z \in F$. Sinon, on pose

$$y = \frac{r}{2\|z\|} z, \qquad \text{de sorte que } \|y\| = \frac{r}{2} < r \implies y \in B(0, r).$$

D'après l'étape 1, $y \in F$, et comme F est stable par multiplication scalaire,

$$z = \frac{2\|z\|}{r} y \in F.$$

Donc $E \subseteq F$, et comme $F \subseteq E$, on conclut $F = E$.

2. Si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \emptyset$

C'est la contraposée de la question 1 : si l'on avait $\mathring{F} \neq \emptyset$, la question 1 donnerait $F = E$, ce qui contredit l'hypothèse $F \neq E$. Donc $\mathring{F} = \emptyset$.

Exercice 6 : adhérence et intérieur d'un ensemble de suites

On note $E = \mathcal{C}_0$ l'ensemble des suites complexes convergeant vers 0, et

$$A = \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \ : \ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n = 0\big\}.$$

0. $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un e.v.n.

Structure d'espace vectoriel. L'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les opérations terme à terme. La partie $\mathcal{C}_0$ en est un sous-espace vectoriel :

— la suite nulle converge vers 0, donc $\mathcal{C}_0 \neq \emptyset$;

— si $u, v \in \mathcal{C}_0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors par linéarité de la limite $\lambda u_n + \mu v_n \to \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$, donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{C}_0$.

$\|\cdot\|_\infty$ **est bien définie.** Toute suite convergente est bornée : si $u_n \to 0$, il existe N tel que $|u_n| \leqslant 1$ pour $n \geqslant N$, et alors $\sup_n |u_n| \leqslant \max\big(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, 1\big) < +\infty$. Ainsi $\|u\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est un réel positif fini.

Axiomes de norme. Soient $u, v \in \mathcal{C}_0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) *Séparation.* $\|u\|_\infty = 0 \iff \forall n,\ |u_n| = 0 \iff u = 0$.

(ii) *Homogénéité.* $\|\lambda u\|_\infty = \sup_n |\lambda||u_n| = |\lambda| \sup_n |u_n| = |\lambda|\,\|u\|_\infty$.

(iii) *Inégalité triangulaire.* Pour tout n, $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$; en passant au supremum sur n, $\|u + v\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$.

Donc $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

1. $\overline{A} = \mathcal{C}_0$

L'inclusion $\overline{A} \subseteq \mathcal{C}_0$ est immédiate puisque $A \subseteq \mathcal{C}_0 = E$ et que l'adhérence est prise dans E. Réciproquement, soient $u = (u_n)_n \in \mathcal{C}_0$ et $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \to 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N$. Définissons $v = (v_n)_n$ par

$$v_n = \begin{cases} u_n & \text{si } n < N, \\ 0 & \text{si } n \geqslant N. \end{cases}$$

Alors $v \in A$ (suite à support fini) et

$$\|u - v\|_\infty = \sup_{n\geqslant N} |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Donc $v \in B(u, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a $u \in \overline{A}$. D'où $\overline{A} = \mathcal{C}_0$: A est dense dans $\mathcal{C}_0$.

2. $\mathring{A} = \emptyset$

Preuve directe. Soient $u \in A$ et $r > 0$; montrons que $B(u,r) \not\subseteq A$. Soit N tel que $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant N$. Définissons $w = (w_n)_n$ par

$$w_n = u_n + \frac{r}{2(n+1)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Alors :

— $w \in \mathcal{C}_0 = E$, comme somme de deux suites tendant vers 0 ;

— $\|w - u\|_\infty = \sup_n \frac{r}{2(n+1)} = \frac{r}{2} < r$, donc $w \in B(u,r)$;

— $w \notin A$: pour tout $n \geqslant N$, $w_n = \frac{r}{2(n+1)} \neq 0$, donc w n'est pas à support fini.

Ainsi aucune boule ouverte centrée en un point de A n'est incluse dans A (et si $u \notin A$, alors $u \notin \mathring{A}$ puisque $\mathring{A} \subseteq A$). Donc $\mathring{A} = \emptyset$.

Preuve alternative (via l'exercice 5). A est un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}_0$: il contient la suite nulle et est stable par combinaison linéaire (si u s'annule à partir de N_1 et v à partir de N_2, alors $\lambda u + \mu v$ s'annule à partir de $\max(N_1, N_2)$). De plus $A \neq E$: la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{C}_0$ mais n'est pas à support fini. D'après l'exercice 5, question 2, on conclut $\mathring{A} = \emptyset$.

Exercice 8 : Deux parties denses et disjointes

On donne deux solutions, toutes deux aussi valables l'une que l'autre, comprendre les deux approches est optimal, la seconde approche est bien si vous préférez utiliser des suites, tandis que la première convient si vous préférez appliquer les définitions.

Solution 1 : caractérisation topologique de l'intérieur. Supposons par l'absurde que $\mathring{A} \neq \emptyset$. Il existe donc $x \in \mathring{A}$ et donc $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq A$.
Puisque B est dense dans E, et qu'en particulier, puisque $x \in A, x \in E$, on a que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in B$ tel que $d(x,y) < \varepsilon$. Si l'on applique cela à $\varepsilon = r/2$ (par exemple pour avoir immédiatement une inclusion dans la boule de rayon r), alors on a $y \in B(x,r)$ et ainsi $B \cap B(x,r) \neq \emptyset$ donc $A \cap B \neq \emptyset$ ce qui est absurde.
On en déduit $\mathring{A} = \emptyset$. Le même raisonnement, en échangeant les rôles de A et B, donne $\mathring{B} = \emptyset$.

Solution 2 : caractérisation séquentielle. Supposons par l'absurde que $\mathring{A} \neq \emptyset$, et soit $x \in \mathring{A}$. Par définition de l'intérieur, il existe $r > 0$ tel que

$$B(x,r) \subset A,$$

où $B(x,r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r (pour l'instant la preuve est exactement la même que dans la première méthode, pensez à développer cet automatisme d'appliquer la définition de l'intérieur quand vous prouvez des résultats similaires).
Par la caractérisation séquentielle de la densité, puisque B est dense dans E et que $x \in E$, il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B telle que $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
Puisque $B(x,r)$ est un voisinage de x, la convergence de (b_n) vers x assure qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad b_n \in B(x,r).$$

En particulier, $b_N \in B(x,r) \subset A$. Or $b_N \in B$ par construction, donc

$$b_N \in A \cap B,$$

ce qui contredit $A \cap B = \emptyset$.
On en déduit $\mathring{A} = \emptyset$, et de même $\mathring{B} = \emptyset$.

2. En déduire que $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et $\mathbb{R} \mathring{\setminus} \mathbb{Q} = \emptyset$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

On applique le résultat de la question précédente avec $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

— $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (densité des rationnels).

— $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (densité des irrationnels).

— $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ par définition.

Les hypothèses de la question 1 sont donc satisfaites, ce qui donne immédiatement

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \mathring{\setminus} \mathbb{Q} = \emptyset.$$