Analyse 1A Eco - Corrigé des exercices traités en cours : TD2

Etienne Donier-Meroz - Antoine Roche

23 octobre 2026

Corrigé des exercices 1, 2, 3, 4 et 5.

Exercice 1 — Normes 1, 2 et infinie/sup/uniforme non équivalentes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

Pour $a < b$ deux réels, on note $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[a,b]$.

Une famille de fonctions. Pour $n \geqslant 1$, on pose $h_n := \frac{b-a}{n}$ et, pour $x \in [a,b]$,

$$f_n(x) := n \max\left(0,\ 1 - \frac{x-a}{h_n}\right).$$

C'est une fonction continue (maximum de deux fonctions continues), donc un élément non nul de E. Géométriquement, f_n est le « triangle » valant n en a, décroissant affinement jusqu'à 0 en $a + h_n = a + \frac{b-a}{n}$, puis nul sur $\left[a + \frac{b-a}{n}, b\right]$: c'est un triangle de hauteur n et de base $\frac{b-a}{n}$.

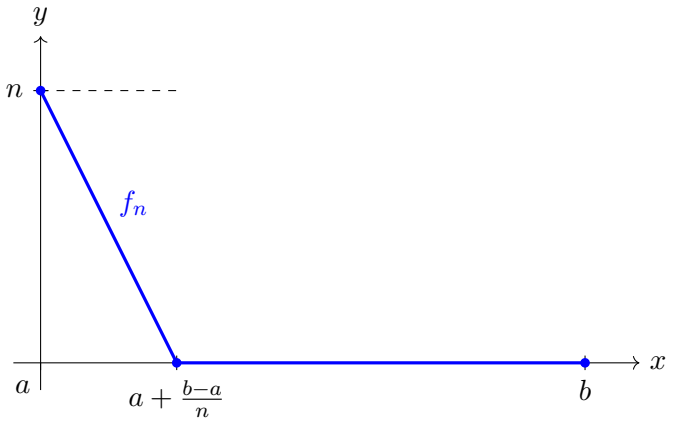


FIGURE 1 – Graphe de la fonction f_n : c'est un triangle de hauteur n et de base $\frac{b-a}{n}$, nulle sur $\left[a + \frac{b-a}{n}, b\right]$.

Calcul des trois normes.

- Norme infinie : f_n est positive, décroissante sur $[a,b]$, donc $\|f_n\|_\infty = f_n(a) = n$.
- Norme 1 : **A remarquer :** Toujours chercher à se simplifier la vie, ici on peut remarquer simplement que l'aire sous la courbe est la moitié de la surface d'un rectangle de côtés de longueur $(b-a)/n$ et n donc en divisant l'aire de ce rectangle par 2 on trouve bien $\|f_n\|_1 = (b-a)/2$.
  Autrement : en posant $u = x - a$ puis $t = u/h_n$,

$$\|f_n\|_1 = \int_a^{a+h_n} n\left(1 - \frac{x-a}{h_n}\right) dx = n\,h_n \int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{nh_n}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

— Norme 2 : avec le même changement de variables,

$$\|f_n\|_2^2 = \int_a^{a+h_n} n^2 \left(1 - \frac{x-a}{h_n}\right)^2 dx = n^2\, h_n \int_0^1 (1-t)^2\, dt = \frac{n^2 h_n}{3} = \frac{n(b-a)}{3},$$

donc $\|f_n\|_2 = \sqrt{\dfrac{n(b-a)}{3}}$.

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

$$\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = \frac{2}{b-a}\sqrt{\frac{n(b-a)}{3}} = 2\sqrt{\frac{n}{3(b-a)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

On ne peut donc avoir $\|\cdot\|_2 \leqslant M\,\|\cdot\|_1$, ce qui nie l'équivalence des normes.

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{2n}{b-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

On ne peut donc avoir $\|\cdot\|_\infty \leqslant M\,\|\cdot\|_1$.

$\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = \frac{n}{\sqrt{\frac{n(b-a)}{3}}} = \sqrt{\frac{3n}{b-a}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

On ne peut donc avoir $\|\cdot\|_\infty \leqslant M\,\|\cdot\|_2$.

Les trois normes sont donc deux à deux non équivalentes sur E.

Exercice 2 — Un autre exemple de normes non équivalentes

$E = \left\{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\right\}$ est un espace vectoriel (rapide comme sous-espace de $C^1([0,1])$).

N_∞ et N'_∞ sont des normes sur E : Tout d'abord N_∞ et N'_∞ sont bien définies car f et f' sont toutes deux continues sur un compact donc sont bornées (et atteignent leurs bornes).
Pour N_∞, le fait que ce soit une norme est immédiat par la définition de la norme infinie. Pour N'_∞, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates par la linéarité de l'opérateur de dérivation sur $C^1([0,1])$. L'application est aussi clairement positive. Reste à vérifier la propriété de séparation : Soit $f \in E$ telle que $N'_\infty(f) = 0$, on a donc $\|f'\|_\infty = 0 \implies f' = 0$ et donc f est constante sur $[0,1]$, en particulier, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) = 0$ donc $f = 0$. N'_∞ est donc bien une norme sur E (notez que $f(0) = 0$ est essentiel ici !).

N_∞ et N'_∞ ne sont pas équivalentes : On va procéder comme lors de l'exercice 1 et trouver une suite de fonctions $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ (donc C^1 qui valent 0 en 0) telles que le quotient $N'_\infty(f_n)/N_\infty(f_n)$ diverge quand $n \to \infty$.
Intuition : Avant de donner la suite telle quelle et de montrer qu'elle fonctionne sans davantage d'explications, réfléchissons un peu à comment on pourrait réussir à faire exploser le quotient N'_∞/N_∞. Une manière simple est de construire une suite de fonctions $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui garde N_∞ à peu près constante (voire même constante) tandis que N'_∞ explose. $N_\infty(f_n)$ dépend uniquement du supremum de f_n tandis que $N'_\infty(f_n)$ dépend uniquement du supremum de f'_n, l'idée est donc

que si on trouve une suite de fonctions (f_n) qui reste majorée pour tout n (disons par 1) tandis que la suite de dérivées (f_n') grossit rapidement, on va rendre le quotient de plus en plus grand.

La suite : Une telle suite est (par exemple) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : t \in [0,1] \mapsto t^n$. Pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(0) = 0^n = 0$ et f_n est polynomiale donc C^∞, en particulier C^1 : on a bien $f_n \in E$. Comme f_n est positive et croissante sur $[0,1]$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ N_\infty(f_n) = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = f_n(1) = 1.$$

Par ailleurs, f_n' est elle aussi positive et croissante sur $[0,1]$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n'(t) = nt^{n-1} \implies N_\infty'(f_n) = f_n'(1) = n.$$

On en déduit

$$\frac{N_\infty'(f_n)}{N_\infty(f_n)} = \frac{n}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

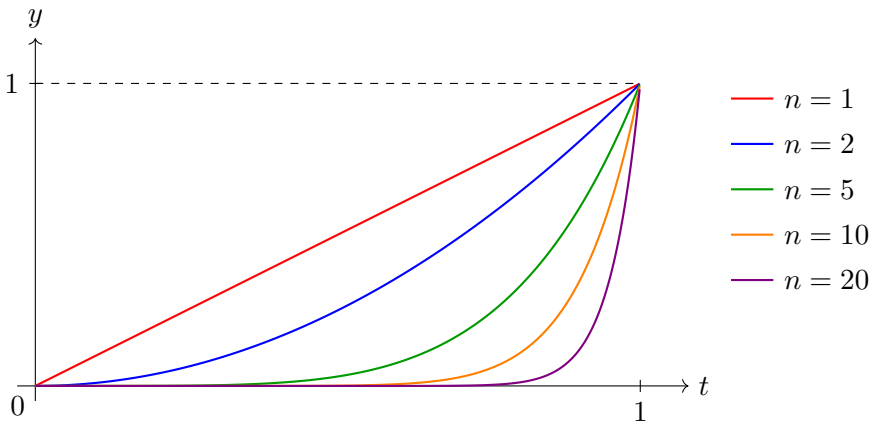


FIGURE 2 – Graphes des fonctions $t \mapsto t^n$ sur $[0,1]$ pour $n \in \{1,2,5,10,20\}$. Les f_n restent bornées par 1, mais la pente en $t = 1$, égale à n, devient de plus en plus forte donc la dérivée explose.

Un autre candidat : Une telle suite est (par exemple) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \in [0,1] \mapsto \sin(2nx)$. Clairement pour tout n, $f_n(0) = 0$, les (f_n) sont C^∞ donc C^1 et l'avantage du sinus est qu'il est toujours majoré par 1 en valeur absolue. Le facteur 2 est seulement une modification pratique pour avoir 1 comme norme infinie dès que $n \geqslant 1$ comme justifié ci dessous mais la suite sans facteur 2 fonctionne tout aussi bien car dans tous les cas n tend vers l'infini donc devient aussi grand qu'on veut. On a donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ N_\infty(f_n) = \sup_{x\in[0,1]} |\sin(2nx)| = 1 \quad \text{car } \pi/2 \in [0,2] \subset [0,2n].$$

Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n'(x) = 2n\cos(2nx) \implies N_\infty'(f_n) = 2n.$$

On en déduit

$$\frac{N_\infty'(f_n)}{N_\infty(f_n)} = \frac{2n}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

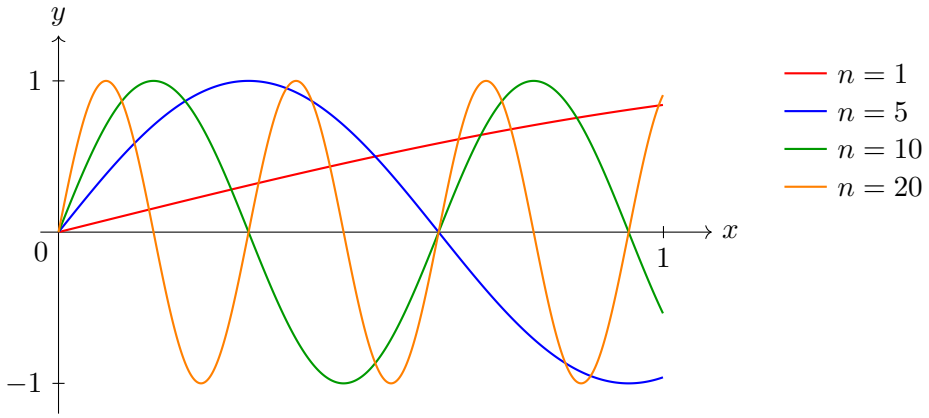


FIGURE 3 – Graphes des fonctions $x \mapsto \sin(nx)$ sur $[0,1]$ pour $n \in \{1,5,10,20\}$. On garde des f_n bornées mais les pentes deviennent de plus en plus fortes donc la dérivée explose. (Le facteur 2 dans le sinus ne change pas l'intuition sous-jacente).

Remarque bonus, est-ce que l'autre sens aurait pu marcher ? On vient de montrer qu'il ne pouvait pas exister de constante universelle $M > 0$ telle que $N'_\infty \leqslant MN_\infty$ mais est-ce que l'inverse est possible ? En fait oui, et c'est le théorème des accroissements finis qui nous le donne, en effet, pour $f \in E$:

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \left| \int_0^x f'(u)du \right| \leqslant \int_0^x |f'(u)|du \leqslant N'_\infty(f)x \leqslant N'_\infty(f).$$

On est donc dans le cas intermédiaire où la norme N'_∞ est plus forte que la norme N_∞ donc on a une inégalité de la forme $N_\infty \lesssim N'_\infty$ mais pas $N'_\infty \lesssim N_\infty$. C'est analogue au cas des normes 1 et 2 pour les fonctions continues sur un segment, elles ne sont pas équivalentes mais la norme 2 domine quand même la norme 1 (Par Cauchy-Schwarz).

Exercice 3 — Propriétés des suites réelles

On rappelle qu'une suite extraite de u s'écrit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, et qu'une telle application vérifie par conséquent $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout n.
Note de terminologie : L'énoncé utilise de manière interchangeable suite extraite et sous-suite : c'est la même chose !

1. u croissante admettant une suite extraite majorée : Puisque u est croissante, elle admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (elle peut ne pas converger cependant sa limite existe, éventuellement l'infini. Cela exclut le cas d'une suite du type $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle la limite n'existe même pas).
   D'autre part, si on avait $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ alors on aurait pour toute suite extraite $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et donc aucune suite extraite ne serait majorée. On en déduit que u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. On sait même qu'en l'occurrence $l = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et que $l \leqslant M$ pour M le majorant de la suite extraite.
2. u croissante admettant une sous-suite convergente : On note $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ pour cette sous-suite convergente. Même réflexe : puisque u est croissante, sa limite existe et c'est un nombre réel ou $+\infty$. Par ailleurs, u admet une sous-suite qui converge donc qui en particulier est bornée, on peut appliquer la question 1 pour dire que u converge donc vers une limite $l' \in \mathbb{R}$. Cette fois on a l'information en plus qu'une suite extraite converge, ainsi par unicité de la limite $l' = l$ et donc u converge vers l la limite de la sous-suite.
   Remarque : En sachant qu'une suite extraite converge au lieu de juste savoir qu'une suite extraite est majorée, on a gagné le fait de savoir en plus la valeur de la limite de u, là où

avant on savait quand même que la limite existait mais on avait seulement un majorant de cette limite.

3. u non majorée : $+\infty$ est valeur d'adhérence de u. Montrons qu'il existe une suite extraite de u qui diverge vers $+\infty$.
   On va tout d'abord avoir besoin du résultat suivant afin de construire par récurrence une sous-suite de u qui diverge :

   Remarque centrale. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{u_m,\ m > N\}$ n'est pas majoré. En effet, si il était majoré, il existerait $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_m \leqslant M$ pour tout $m > N$; par ailleurs, l'ensemble fini $\{u_0, \dots, u_N\}$ admet un maximum M', la suite u est alors majorée par $\max(M, M')$, ce qui est absurde. On va garder cette remarque à l'esprit par la suite.

   Construction par récurrence. On va chercher à construire une suite $(u_{\varphi(n)})_n$ telle que pour tout entier n, on ait $u_{\varphi(n)} \geqslant n$ avec φ strictement croissante.
   Puisque u n'est pas majorée, on peut trouver un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant 0$, sinon la suite serait majorée par 0, on pose $\varphi(0) = n_0$.
   Supposons que l'on a construit $(\varphi(0), \dots, \varphi(n))$ avec

   $$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n),$$

   et de telle sorte que $u_{\varphi(k)} \geqslant k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Par la remarque précédente, l'ensemble $\{u_m, m > \varphi(n)\}$ n'est pas majoré, ainsi, il existe un terme $u_{N_{n+1}}$ appartenant à cet ensemble avec $u_{N_{n+1}} \geqslant n+1$. On pose $\varphi(n+1) = N_{n+1} > \varphi(n)$ par construction. La récurrence est donc bien vérifiée.
   Par la minoration de chaque terme, on en déduit que de manière évidente $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Exercice 4 — Limite supérieure et limite inférieure

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_k := \inf\{u_n,\ n \geqslant k\}, \quad b_k := \sup\{u_n,\ n \geqslant k\},$$

de sorte que $\liminf u_n = \sup_k a_k$ et $\limsup u_n = \inf_k b_k$.
On note ici $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, admettre une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ revient donc à admettre une limite réelle OU à diverger vers $\pm\infty$ (c'est donc une vraie information, une suite peut ne pas avoir de limite du tout).

1. Bonne définition

Les ensembles $U_k := \{u_n,\ n \geqslant k\}$ sont des parties non vides de $\mathbb{R}$. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie non vide admet une borne inférieure et une borne supérieure : $a_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sont bien définis (avec la convention $\inf \emptyset$ inutile ici puisque $U_k \neq \emptyset$).
Comme $U_{k+1} \subset U_k$, on a

$$a_k \leqslant a_{k+1} \quad \text{et} \quad b_{k+1} \leqslant b_k$$

(passer à une partie plus petite augmente l'inf et diminue le sup). Ainsi $(a_k)_k$ est croissante et $(b_k)_k$ est décroissante dans $\overline{\mathbb{R}}$. Une suite monotone d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, égale à sa borne supérieure (cas croissant) ou inférieure (cas décroissant) :

$$\liminf u_n = \sup_k a_k = \lim_{k\to+\infty} a_k, \quad \limsup u_n = \inf_k b_k = \lim_{k\to+\infty} b_k,$$

ces deux quantités étant bien définies dans $\overline{\mathbb{R}}$.
On déduit aussi que

$$\liminf u_n \leqslant \limsup u_n.$$

En effet, soient $j, k \in \mathbb{N}$ et posons $m := \max(j,k)$. Par monotonie des suites (a_k) et (b_k), et puisque $a_m = \inf_{n\geqslant m} u_n \leqslant \sup_{n\geqslant m} u_n = b_m$,

$$a_k \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_j.$$

Ainsi $a_k \leqslant b_j$ pour tous j, k. En prenant l'infimum en j (à k fixé), on obtient $a_k \leqslant \inf_j b_j = \limsup u_n$ pour tout k, puis en prenant le supremum en k, $\liminf u_n = \sup_k a_k \leqslant \limsup u_n$.
Attention : partir seulement de $a_k \leqslant b_k$ ne suffit pas pour « prendre l'inf à droite et le sup à gauche », car les deux membres dépendent du même indice k ; c'est pour cela qu'on passe par $a_k \leqslant b_j$ pour tous j, k.
Remarque. Si u est majorée, alors $b_k \in \mathbb{R}$ pour tout k et $\limsup u_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; si u n'est pas majorée, alors $b_k = +\infty$ pour tout k et $\limsup u_n = +\infty$. De façon symétrique, $\liminf u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si u est minorée et $\liminf u_n = -\infty$ sinon. En toute rigueur, $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ sont donc des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$; ils sont tous deux dans $\mathbb{R}$ dès que u est bornée.

2. Plus petite et plus grande valeur d'adhérence

On traite le cas de $L := \limsup u_n$; le cas de lim inf est symétrique (rigoureusement il se déduit en appliquant le résultat à la suite $(-u_n)_n$, puisque $\liminf u_n = -\limsup(-u_n)$ et que x est valeur d'adhérence de u si et seulement si $-x$ est valeur d'adhérence de $-u$).

Remarque : De plus, on doit distinguer les 3 cas possibles où L la limite supérieure est une limite réelle ou bien $\pm\infty$. Le cas vraiment intéressant est le premier cas et on commence aussi par celui là.

Cas $L \in \mathbb{R}$. Il faut montrer 2 choses dans cette question, le fait que L soit bien une valeur d'adhérence ET le fait que ça soit la plus grande. On commence par le premier point.

(i) L est valeur d'adhérence de u.
On revient à la définition, c'est à dire qu'on veut montrer que pour tout $\varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ avec $|u_n - L| < \varepsilon$.
Pour cela, soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Comme $L = \inf_k b_k$, il existe k_0 tel que $b_{k_0} < L + \varepsilon$. On pose $n_0 = \max(k_0, N)$ de telle sorte à avoir $n_0 \geqslant N$.
Par décroissance des (b_k) on a d'une part $b_{n_0} \leqslant b_{k_0} < L + \varepsilon$ et puisque L est minorant des (b_k) on a d'autre part $L - \varepsilon < L \leqslant b_{n_0}$.
Pour conclure, il suffit de remarquer que $b_{n_0} = \sup_{k\geqslant n_0} u_k$ et que $L - \varepsilon < b_{n_0}$: par caractérisation de la borne supérieure, $L - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{u_k, k \geqslant n_0\}$, donc il existe $m \geqslant n_0$ tel que $u_m > L - \varepsilon$. De plus, $u_m \leqslant b_{n_0} < L + \varepsilon$. Ainsi $m \geqslant n_0 \geqslant N$ et

$$L - \varepsilon < u_m < L + \varepsilon, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |u_m - L| < \varepsilon.$$

Ceci vaut pour tous $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, on conclut donc que $L \in \mathrm{Adh}(u)$.
(ii) Toute valeur d'adhérence est $\leqslant L$. Soit ℓ une valeur d'adhérence de u, supposons par l'absurde que $\ell > L$ (y compris $\ell = +\infty$). On peut poser $\varepsilon := (\ell - L)/2 > 0$ si $\ell \in \mathbb{R}$. Il existe k tel que $b_k < L + \varepsilon = \ell - \varepsilon$, donc $u_n < \ell - \varepsilon$ pour tout $n \geqslant k$: aucun terme d'indice $\geqslant k$ ne vérifie $|u_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui contredit le fait que ℓ soit valeur d'adhérence.
Si $\ell = +\infty$, alors par définition d'une valeur d'adhérence égale à $+\infty$, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Comme $\varphi(n) \geqslant n \geqslant k$ pour tout $n \geqslant k$, on a en particulier

$$b_k = \sup_{n\geqslant k} u_n \geqslant \sup_{n\geqslant k} u_{\varphi(n)} = +\infty, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

et donc $L = \lim_k b_k = +\infty$, ce qui contredit $L \in \mathbb{R}$.
Variante : avec $A := L + 1$, il existe k tel que $b_k < A$, donc $u_n < A$ pour tout $n \geqslant k$; aucune sous-suite de u ne peut alors tendre vers $+\infty$, ce qui contredit également le fait que $+\infty$ soit valeur d'adhérence.
Donc toute valeur d'adhérence est $\leqslant L$, et L est la plus grande valeur d'adhérence de u.

Cas $L = +\infty$. Alors $b_k = +\infty$ pour tout k, c'est-à-dire que u n'est pas majorée. D'après l'exercice 3 question 3, $+\infty$ est valeur d'adhérence de u, et c'est évidemment la plus grande dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Cas $L = -\infty$. Alors $b_k \to -\infty$. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe k tel que $b_k < A$, donc $u_n < A$ pour tout $n \geqslant k$: ainsi $u_n \to -\infty$. La seule valeur d'adhérence de u est alors $-\infty$ (une suite qui tend vers une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ n'a que cette limite comme valeur d'adhérence), et $L = -\infty$ en est bien la plus grande.

Par symétrie, $\liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de u, et toute valeur d'adhérence ℓ vérifie $\liminf u_n \leqslant \ell \leqslant \limsup u_n$.

3. Caractérisation de la convergence

Montrons que u converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\liminf u_n = \limsup u_n \in \mathbb{R}$ (l'égalité $\liminf = \limsup = \pm\infty$ correspondant, elle, à la divergence de u vers $\pm\infty$).

($\Rightarrow$) Supposons $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. En passant à l'inf et au sup sur $\{n \geqslant N\}$:

$$\ell - \varepsilon \leqslant a_N \leqslant \liminf u_n \leqslant \limsup u_n \leqslant b_N \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Supposons $\liminf u_n = \limsup u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\inf_k b_k = \ell$, il existe k_1 tel que $b_{k_1} < \ell + \varepsilon$; comme $\sup_k a_k = \ell$, il existe k_2 tel que $a_{k_2} > \ell - \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geqslant N := \max(k_1, k_2)$,

$$\ell - \varepsilon < a_{k_2} \leqslant u_n \leqslant b_{k_1} < \ell + \varepsilon,$$

c'est-à-dire $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Donc $u_n \to \ell$.

4. Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge

Soit (u_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ (muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$).

u est bornée. Appliquons la définition avec $\varepsilon = 1$: il existe N_0 tel que $|u_n - u_m| \leqslant 1$ pour tous $n, m \geqslant N_0$; en particulier $|u_n| \leqslant |u_{N_0}| + 1$ pour $n \geqslant N_0$, et donc $|u_n| \leqslant \max\big(|u_0|, \ldots, |u_{N_0-1}|, |u_{N_0}| + 1\big)$ pour tout n. Par conséquent $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ pour tout k, et $\liminf u_n, \limsup u_n \in \mathbb{R}$.

$\limsup u_n \leqslant \liminf u_n$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit N tel que $|u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$ pour tous $n, m \geqslant N$. Fixons $m \geqslant N$: pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \leqslant u_m + \varepsilon$, d'où en passant au sup sur $n \geqslant N$: $b_N \leqslant u_m + \varepsilon$. Cette inégalité vaut pour tout $m \geqslant N$, donc en passant à l'inf sur $m \geqslant N$: $b_N \leqslant a_N + \varepsilon$. Ainsi

$$\limsup u_n \leqslant b_N \leqslant a_N + \varepsilon \leqslant \liminf u_n + \varepsilon.$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\limsup u_n \leqslant \liminf u_n$.

Conclusion. Avec l'inégalité $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$ de la question 1, on obtient $\liminf u_n = \limsup u_n \in \mathbb{R}$, donc u converge d'après la question 3. Autrement dit, $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est complet.

Exercice 5 — L'ensemble des valeurs d'adhérence est un fermé

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 1$), muni d'une norme $\|\cdot\|$, et soit

$$A := \mathrm{Adh}\big((x_n)_n\big) = \big\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists m \geqslant N,\ \|x_m - x\| < \varepsilon\big\}.$$

Démonstration (caractérisation séquentielle des fermés)

$\mathbb{R}^d$ étant un espace métrique, il suffit de montrer que toute limite d'une suite d'éléments de A appartient encore à A.
Soit donc $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergeant vers un point $y \in \mathbb{R}^d$. Montrons que $y \in A$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$.

— Comme $y_p \to y$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|y_p - y\| < \varepsilon/2$.

— Comme $y_p \in A$ (avec le réel $\varepsilon/2 > 0$ et l'entier N), il existe $m \geqslant N$ tel que $\|x_m - y_p\| < \varepsilon/2$.

Par inégalité triangulaire,

$$\|x_m - y\| \leqslant \|x_m - y_p\| + \|y_p - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc trouvé $m \geqslant N$ tel que $\|x_m - y\| < \varepsilon$. Ceci valant pour tous $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, on conclut que $y \in A$. Ainsi A est fermé.

Variante

On peut aussi remarquer que

$$A = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n,\ n \geqslant N\}}.$$

En effet, $x \in A$ signifie que, pour tout N, tout voisinage de x rencontre $\{x_n,\ n \geqslant N\}$, c'est-à-dire que x appartient à l'adhérence de $\{x_n,\ n \geqslant N\}$, et ce pour tout N. Ainsi, A est une intersection (quelconque) de fermés, donc un fermé.

Question bonus

Non, se placer dans $\mathbb{R}^d$ n'est pas important. La première démonstration n'utilise que l'inégalité triangulaire de la distance : elle est valable telle quelle dans n'importe quel espace métrique (E, d) (en remplaçant $\|x_m - y\|$ par $d(x_m, y)$), en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés, valable dans tout espace métrique. La seconde démonstration est encore plus générale : l'écriture $A = \bigcap_N \overline{\{x_n,\ n \geqslant N\}}$ et la stabilité des fermés par intersection quelconque montrent que le résultat vaut dans tout espace topologique, à condition d'y définir les valeurs d'adhérence à l'aide des voisinages (la définition avec ε n'ayant plus de sens sans distance) : x est valeur d'adhérence si, pour tout voisinage V de x et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $m \geqslant N$ tel que $x_m \in V$.