Analyse – TD Feuille 3 : continuité ; applications linéaires continues/bornées

Etienne Donier-Meroz - Antoine Roche

23 octobre 2026

Corrigé des exercices 1, 3, 4, 5 et 6.

Exercice 1 – Étude de continuité de fonctions de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

1. Déjà la fonction f est bien définie car $x \geqslant \lfloor x \rfloor$. Avant de se lancer il faut réfléchir en premier lieu aux points qui peuvent poser problème pour la continuité, puisque la partie entière est constante pour $x \in]n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, on n'a pas de problèmes de continuité sur ces ouverts. La difficulté se pose donc uniquement aux raccordements. Concrètement :

   Continuité sur $]n, n+1[$**.** Sur l'ouvert $]n, n+1[$, f coïncide avec $x \mapsto n + \sqrt{x-n}$, qui est continue, pas de problèmes.

   Reste à vérifier qu'aux points de raccords i.e. les entiers relatifs n la fonction reste bien continue (ou pas), on regarde donc les limites à gauche et à droite.

   Continuité à droite en n**.** Pour $x \in [n, n+1[$, $f(x) = n + \sqrt{x-n} \xrightarrow[x \to n^+]{} n = f(n)$. La fonction f est donc bien continue à droite. On regarde à gauche maintenant.

   Continuité à gauche en n**.** Pour $x \in [n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$, donc

   $$f(x) = n - 1 + \sqrt{x - (n-1)} \xrightarrow[x \to n^-]{} n - 1 + \sqrt{1} = n = f(n).$$

   On en déduit que f est continue à gauche et à droite en tout entier n, donc continue en n. On avait déjà remarqué que la fonction f était bien continue sur les intervalles $]n, n+1[$ on en déduit donc que f est bien continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. On s'intéresse d'abord à la fonction dans sa globalité pour voir à quels points (x, y) la continuité peut poser d'éventuels problèmes.

   Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f coïncide avec la fraction rationnelle $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$, dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle y est donc continue sans soucis. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, reste à voir si elle est aussi continue en $(0,0)$ pour déduire si la fonction est bien continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

   Continuité en $(0,0)$**.** Avant de s'engager, il faut bien garder en tête que si on veut montrer que la fonction est continue en $(0,0)$ il faut montrer que $f(x,y) \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} f(0,0)$ indépendamment de comment (x, y) tend vers $(0,0)$, il ne suffit donc pas seulement de montrer qu'on ait la bonne limite pour $(1/n, 0)$ et $(0, 1/n)$ (par exemple). Ici, pour avoir l'idée que la fonction n'est en fait pas continue, il faut se rendre compte que si $x = y$ alors $xy = x^2 = y^2$ et donc, à une constante près, le numérateur et dénominateur se simplifient, ainsi, sur cette diagonale, $f(x, y)$ ne peut tendre vers 0. Rendons cette idée rigoureuse :

considérons la suite $(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$. On a $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$, mais

$$f(x_n, y_n) = \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Par la caractérisation séquentielle de la continuité, f **n'est pas continue en** $(0,0)$, et donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On utilise la négation de la caractérisation séquentielle : il suffit de trouver une suite (x_n) qui tend vers a telle que $f(x_n) \not\to f(a)$. C'est la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ qui vont nous aider (cf. TD précédent).
   - *Si* $a \in \mathbb{Q}$, alors $f(a) = 1$. Par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut trouver une suite $(r_n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Or, par définition de f, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(r_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \neq f(a)$.

     Remarque : On peut même poser une suite explicitement si on le souhaite, par exemple : $x_n := a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ pour $n \geq 1$. Alors $x_n \notin \mathbb{Q}$ (sinon $\sqrt{2} = n(x_n - a)$ serait rationnel), donc $f(x_n) = 0$ pour tout n, et $x_n \to a$. Ainsi $f(x_n) \to 0 \neq 1 = f(a)$.
   - *Si* $a \notin \mathbb{Q}$, alors $f(a) = 0$. On fait exactement le même argument en utilisant cette fois la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

     Remarque : Encore une fois, si on le souhaite, on peut poser $x_n := \frac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$. Comme $10^n a - 1 < \lfloor 10^n a \rfloor \leq 10^n a$, on a $|x_n - a| \leq 10^{-n} \to 0$, donc $x_n \to a$, et $f(x_n) = 1$ pour tout n. Ainsi $f(x_n) \to 1 \neq 0 = f(a)$.

   Dans les deux cas, f **n'est pas continue en** a.

Exercice 3 – Application linéaire continue et norme d'opérateur

1. *Bonne définition.* Si $f \in F = C^1([0,1], \mathbb{R})$, alors f et f' sont continues sur le compact $[0,1]$, donc bornées : $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ sont finis, et $\|f\|_F \in \mathbb{R}_+$.
Séparation. Si $\|f\|_F = 0$, alors $0 \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_F = 0$, donc $\|f\|_\infty = 0$, et comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, $f = 0$.
Homogénéité. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in F$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, donc

$$\|\lambda f\|_F = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty + |\lambda| \, \|f'\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_F .$$

Inégalité triangulaire. Pour $f, g \in F$, $(f+g)' = f' + g'$, donc par l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|f+g\|_F = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|f\|_F + \|g\|_F .$$

Donc $\|\cdot\|_F$ est une norme sur F.

2. *Bonne définition.* Si $f \in E$, f est continue sur $[0,1]$, donc par le théorème fondamental de l'analyse, $T(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, de dérivée $T(f)' = f$. Ainsi $T(f) \in F$.
Linéarité. Pour $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in [0,1]$, par linéarité de l'intégrale,

$$T(f + \lambda g)(x) = \int_0^x \big(f(t) + \lambda g(t)\big)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \lambda \int_0^x g(t)\,dt = T(f)(x) + \lambda T(g)(x).$$

Donc $T(f + \lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$: T est linéaire.

3. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$|T(f)(x)| = |\int_0^x f(t)\,dt| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq x\,\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty\,,$$

donc $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. De plus $T(f)' = f$, donc $\|T(f)'\|_\infty = \|f\|_\infty$. Ainsi

$$\|T(f)\|_F = \|T(f)\|_\infty + \left\|T(f)'\right\|_\infty \leq 2\,\|f\|_\infty\,.$$

T étant linéaire, cette inégalité montre que T est bornée, donc continue, et que $|||T||| \leq 2$ (la norme d'opérateur est la plus petite constante vérifiant une telle inégalité).

4. Prenons $f = 1$ (fonction constante égale à 1), de sorte que $\|f\|_\infty = 1$. Alors $T(f)(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $\|T(f)\|_\infty = 1$ et $T(f)' = 1$, d'où $\|T(f)'\|_\infty = 1$. Ainsi

$$\|T(f)\|_F = 2 = 2\,\|f\|_\infty\,,$$

donc

$$|||T||| = \sup_{g\in E,\, g\neq 0} \frac{\|T(g)\|_F}{\|g\|_\infty} \geq \frac{\|T(f)\|_F}{\|f\|_\infty} = 2.$$

Avec la question 3, on conclut que $|||T||| = 2$.

Exercice 4 – Application linéaire continue et norme d'opérateur (bis)

1. *Bonne définition.* Pour $f \in E$, la fonction ϕf est continue sur $[0,1]$, donc $\Phi(f) : x \mapsto \int_0^x \phi(t)f(t)\,dt$ est bien définie et continue (et même C^1) sur $[0,1]$: $\Phi(f) \in E$.
Linéarité. Pour $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in [0,1]$, par linéarité de l'intégrale,

$$\Phi(f+\lambda g)(x) = \int_0^x \phi(t)\big(f(t)+\lambda g(t)\big)\,dt = \Phi(f)(x) + \lambda\Phi(g)(x).$$

Donc Φ est linéaire.

2. La fonction ϕ est continue sur le compact $[0,1]$, donc $\|\phi\|_\infty < +\infty$. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$|\Phi(f)(x)| \leq \int_0^x |\phi(t)||f(t)|\,dt \leq \|\phi\|_\infty \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|\phi\|_\infty\,\|f\|_1\,.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$,

$$\|\Phi(f)\|_1 = \int_0^1 |\Phi(f)(x)|\,dx \leq \|\phi\|_\infty\,\|f\|_1\,.$$

Φ étant linéaire, elle est donc bornée, c'est-à-dire continue.

3. L'inégalité précédente montre que

$$|||\Phi||| \leq \|\phi\|_\infty\,.$$

Exercice 5 – Dans des $\mathbb{R}$-e.v. une fonction additive et continue en 0 est linéaire

L'additivité étant supposée, il reste à montrer que pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Fixons $x \in E$.

Cas $\lambda \in \mathbb{N}$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$: $f(0 \cdot x) = f(0_E) = 0_F = 0 \cdot f(x)$. Si $f(nx) = nf(x)$, alors par additivité

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Cas $\lambda \in \mathbb{Z}$. Par additivité, $f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0_E) = 0_F$, donc $f(-x) = -f(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x),$$

ce qui, avec le cas précédent, traite tout $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Cas $\lambda \in \mathbb{Q}$. Écrivons $\lambda = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Par le cas entier, appliqué au vecteur $\frac{p}{q}x$,

$$q\, f\Big(\tfrac{p}{q}x\Big) = f\Big(q \cdot \tfrac{p}{q}x\Big) = f(px) = pf(x),$$

donc $f\Big(\frac{p}{q}x\Big) = \frac{p}{q}f(x)$.

Cas $\lambda \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(\lambda_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lambda_n \to \lambda$. Par additivité,

$$f(\lambda_n x) = f\big(\lambda x + (\lambda_n - \lambda)x\big) = f(\lambda x) + f\big((\lambda_n - \lambda)x\big).$$

Or $\|(\lambda_n - \lambda)x\|_E = |\lambda_n - \lambda|\, \|x\|_E \to 0$, donc $(\lambda_n - \lambda)x \to 0_E$, et par continuité de f en 0_E,

$$f\big((\lambda_n - \lambda)x\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0_E) = 0_F.$$

Ainsi $f(\lambda_n x) \to f(\lambda x)$. D'autre part, par le cas rationnel, $f(\lambda_n x) = \lambda_n f(x) \to \lambda f(x)$. Par unicité de la limite, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
Finalement, f est additive et vérifie $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: f **est linéaire**.

Exercice 6 – Condition nécessaire et suffisante pour la continuité d'une forme linéaire

($\Rightarrow$) Supposons u continue. Le singleton $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{K}$, et $\ker u = u^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue : $\ker u$ **est fermé**.

($\Leftarrow$) Supposons $\ker u$ fermé. Si $u = 0$, u est continue. Supposons donc $u \neq 0$ et raisonnons par l'absurde en supposant que u n'est pas continue.
Comme u est linéaire, u continue équivaut à : $\exists C > 0,\ \forall x \in E,\ |u(x)| \leq C\,\|x\|$. La négation s'écrit :

$$\forall C > 0,\ \exists x \in E,\ |u(x)| > C\,\|x\|\,.$$

En l'appliquant avec $C = n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}^*}$ telle que $|u(x_n)| > n\,\|x_n\| \geq 0$. En particulier $u(x_n) \neq 0$, et on peut poser $y_n := \frac{x_n}{u(x_n)}$. Alors, par linéarité,

$$u(y_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{|u(x_n)|} < \frac{1}{n}.$$

Par ailleurs, comme $u \neq 0$, il existe $z \in E$ tel que $u(z) \neq 0$; posons $a := \frac{z}{u(z)}$, de sorte que $u(a) = 1$.
Posons enfin $z_n := a - y_n$. On a $u(z_n) = u(a) - u(y_n) = 1 - 1 = 0$, donc $z_n \in \ker u$ pour tout n, et $\|z_n - a\| = \|y_n\| < \frac{1}{n} \to 0$, donc $z_n \to a$. Comme $\ker u$ est fermé, la caractérisation séquentielle des fermés donne $a \in \ker u$, c'est-à-dire $u(a) = 0$, ce qui contredit $u(a) = 1$.
Donc u **est continue**, ce qui conclut : u est continue si et seulement si $\ker u$ est fermé.