Analyse – TD Feuille 4 : complétude ; suites de Cauchy

Etienne Donier-Meroz - Antoine Roche

18 novembre 2026

Corrigé des exercices 1, 2 et 3

Exercice 1 – Sur la série harmonique

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0,$$

donc (u_n) est (strictement) croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Cette somme comporte n termes, et pour tout $k \in \{n+1, \dots, 2n\}$, on a $k \leqslant 2n$ donc $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$. Ainsi

$$u_{2n} - u_n \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

3. Raisonnons par l'absurde et supposons que (u_n) est de Cauchy. En appliquant la définition avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2},\ (n \geqslant N) \wedge (m \geqslant N) \implies |u_n - u_m| < \frac{1}{2}.$$

En prenant $n = N$ et $m = 2N$ (tous deux $\geqslant N$), on obtient $|u_{2N} - u_N| < \frac{1}{2}$, ce qui contredit la question 2. Donc (u_n) **n'est pas de Cauchy**.

4. La suite (u_n) est croissante (question 1) donc admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ensuite, par télescopage et en appliquant la question 2 aux termes d'indice 2^k, on a pour tout $n \geqslant 1$ que

$$u_{2^n} - u_1 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{2^{k+1}} - u_{2^k}) \geqslant \frac{n}{2}.$$

Donc $u_{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Ainsi u diverge car si elle admettait une limite réelle, on aurait aussi u_{2^n} qui tendrait vers cette même limite.

Remarque :
On peut aussi utiliser l'argument classique de comparaison série/intégrale ici qui a le mérite de donner un équivalent en plus, concrètement :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t-1} dt$$

on intègre et on télescope et on trouve même que $u_n \sim \log n$.

Exercice 2 – Un exemple de suite de Cauchy

Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $m > n$. On écrit $u_m - u_n$ comme une somme télescopique, puis on utilise l'inégalité triangulaire et l'hypothèse :

$$|u_m - u_n| = |\sum_{k=n}^{m-1} (u_{k+1} - u_k)| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} |u_{k+1} - u_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} a^k = a^n \frac{1 - a^{m-n}}{1-a} \leqslant \frac{a^n}{1-a}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $0 < a < 1$, on a $\frac{a^n}{1-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a^N}{1-a} < \varepsilon$. Pour tous $m > n \geqslant N$, puisque $a^n \leqslant a^N$,

$$|u_m - u_n| \leqslant \frac{a^n}{1-a} \leqslant \frac{a^N}{1-a} < \varepsilon,$$

et l'inégalité est triviale si $m = n$ (et symétrique en n et m). Ainsi (u_n) **est de Cauchy**. Comme $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, toute suite réelle de Cauchy converge : (u_n) **converge**.

Exercice 3 – Complétude de l'ensemble des suites $\ell^1(\mathbb{N})$

Échauffement dans $\ell^2(\mathbb{N})$

On utilisera deux faits simples.

- *Contrôle des coordonnées.* Pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ et tout indice k, $|x_k| \leqslant \|x\|_{\ell^2}$. Donc si $x(n) \to x$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$, alors pour tout k, $x(n)_k \to x_k$ dans $\mathbb{R}$: la seule limite possible est la limite coordonnée par coordonnée.
- Une suite convergente est de Cauchy et bornée.

Pour les suites 2, 3, 5 et 6, on indexe les coordonnées par $k \in \mathbb{N}^*$ (par exemple, la suite $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ s'écrit $(\frac{1}{k})_{k\geqslant 1}$).

1. $x(n) = (\frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$. On a $\|x(n) - 0\|_{\ell^2} = \frac{1}{n} \to 0$, donc $x(n) \to 0$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

2. $x(n) = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$. La limite coordonnée par coordonnée est $x := (\frac{1}{k})_{k\geqslant 1}$, qui appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ car $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} < \infty$ (série de Riemann d'exposant $2 > 1$). De plus,

$$\|x(n) - x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

comme reste d'une série convergente. Donc $x(n) \to x = (\frac{1}{k})_{k\geqslant 1}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

3. $x(n) = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \dots)$. On a

$$\|x(n)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

d'après l'exercice 1. La suite $(x(n))$ n'est donc pas bornée dans $\ell^2(\mathbb{N})$, donc **elle ne converge pas**. (La limite coordonnée par coordonnée, $(\frac{1}{\sqrt{k}})_{k\geqslant 1}$, n'est d'ailleurs pas dans $\ell^2(\mathbb{N})$.)

4. $x(n)_k = 1$ si $n = k$, 0 sinon ($x(n)$ est le n-ème vecteur de la « base canonique »). Pour $n \neq m$,

$$\|x(n) - x(m)\|_{\ell^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

La suite n'est donc pas de Cauchy (prendre $\varepsilon = \sqrt{2}$), donc **elle ne converge pas**. Remarque : elle converge coordonnée par coordonnée vers 0, mais $\|x(n) - 0\|_{\ell^2} = 1 \not\to 0$.

5. $x(n)_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{nk^3}$. On a $x(n) = x + \frac{1}{n}y$ avec $x := (\frac{1}{k})_{k\geqslant 1}$ et $y := (\frac{1}{k^3})_{k\geqslant 1}$, deux éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$ (séries de Riemann d'exposants 2 et 6), donc $x(n) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Alors

$$\|x(n) - x\|_{\ell^2} = \frac{1}{n}\|y\|_{\ell^2} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^6}\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc $x(n) \to x = (\frac{1}{k})_{k\geqslant 1}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

6. $x(n)_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{nk^{1/3}}$. Ici, $x(n) \notin \ell^2(\mathbb{N})$: tous les termes étant positifs,

$$\sum_{k\geqslant 1} x(n)_k^2 \geqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{n^2k^{2/3}} = +\infty$$

(série de Riemann d'exposant $\frac{2}{3} \leqslant 1$). La suite $(x(n))$ n'est donc pas une suite d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$, et **la question de sa convergence dans $\ell^2(\mathbb{N})$ n'a pas de sens**.

Question 1 – d_1 est une distance sur $\ell^1(\mathbb{N})$

On suit l'indication : on montre que $\|\cdot\|_{\ell^1}$ est une norme sur $\ell^1(\mathbb{N})$, puis on en déduit que $d_1(x,y) = \|x-y\|_{\ell^1}$ est une distance.
$\ell^1(\mathbb{N})$ *est un espace vectoriel.* C'est une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ contenant la suite nulle. Pour $x, y \in \ell^1(\mathbb{N})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout n, $|x_n+\lambda y_n| \leqslant |x_n|+|\lambda||y_n|$, et la série de terme général positif $|x_n|+|\lambda||y_n|$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $x+\lambda y \in \ell^1(\mathbb{N})$. En particulier $x-y \in \ell^1(\mathbb{N})$, donc $d_1(x,y) = \|x-y\|_{\ell^1}$ est bien un réel positif.
Norme. Soient $x, y \in \ell^1(\mathbb{N})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Séparation.* Si $\|x\|_{\ell^1} = 0$, alors pour tout n, $0 \leqslant |x_n| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}|x_k| = 0$, donc $x_n = 0 : x = 0$.
- *Homogénéité.* $\|\lambda x\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda||x_n| = |\lambda|\,\|x\|_{\ell^1}$ par linéarité de la somme d'une série convergente.
- *Inégalité triangulaire.* Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N}|x_n+y_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N}|x_n| + \sum_{n=0}^{N}|y_n| \leqslant \|x\|_{\ell^1} + \|y\|_{\ell^1}.$$

  En faisant tendre $N \to \infty$, on obtient $\|x+y\|_{\ell^1} \leqslant \|x\|_{\ell^1} + \|y\|_{\ell^1}$.

Distance. Pour $x, y, z \in \ell^1(\mathbb{N})$:

- $d_1(x,y) = 0 \iff \|x-y\|_{\ell^1} = 0 \iff x = y$;
- $d_1(y,x) = \|-(x-y)\|_{\ell^1} = |-1|\,\|x-y\|_{\ell^1} = d_1(x,y)$;
- $d_1(x,z) = \|(x-y)+(y-z)\|_{\ell^1} \leqslant \|x-y\|_{\ell^1} + \|y-z\|_{\ell^1} = d_1(x,y) + d_1(y,z)$.

Donc d_1 est une distance sur $\ell^1(\mathbb{N})$.

Question 2 – $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$ est complet

Soit $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$. Pour tout n, $x(n) = (x(n)_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle. Il faut montrer que $(x(n))_n$ converge vers un élément de $\ell^1(\mathbb{N})$.

Étape 1 : candidat limite. Puisque $(x(n))_n$ est de Cauchy, on a que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geqslant N$ on a

$$d_1(x(n), x(m)) < \varepsilon \quad \text{i.e.} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |x(n)_k - x(m)_k| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x(n)_k)_n$ est de Cauchy, puisque c'est une suite de réels, on déduit qu'elle converge vers une limite x_k,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x(n)_k \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k$$

La suite $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc la candidate à la limite. Il reste à montrer que cette suite est bien dans $\ell^1(\mathbb{N})$ et que $(x(n))_n$ converge bien vers cette suite au sens de la distance d_1, et pas seulement terme à termes.

Étape 2 : le candidat limite est sommable. Deux approches possibles pour montrer que la suite candidat limite $x = (x_k)_k$ est sommable (dans $\ell^1(\mathbb{N})$), la deuxième étant très jolie, je souhaite l'intégrer aussi, d'autant plus que c'est un bon réflexe.

Approche 1 : Retour à la définition
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geqslant N$, $d_1(x(m), x(n)) < \varepsilon$. Fixons $n \geqslant N$ et $K \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \geqslant N$,

$$\sum_{k=0}^{K} |x(m)_k - x(n)_k| \leqslant d_1(x(m), x(n)) < \varepsilon.$$

La somme de gauche est une *somme finie*, on peut donc faire tendre $m \to \infty$ terme à terme (étape 1) :

$$\sum_{k=0}^{K} |x(n)_k - x_k| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci vaut pour tout $K \in \mathbb{N}$: les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_k |x(n)_k - x_k|$ sont majorées par ε. Cette série converge donc, et

$$\forall n \geqslant N, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |x(n)_k - x_k| \leqslant \varepsilon. \tag{$*$}$$

Cela permet d'écrire (pour l'instant c'est juste l'inégalité triangulaire appliqué à un entier n quelconque) :

$$\|x\|_{\ell^1(\mathbb{N})} \leqslant \|x - x(n)\|_{\ell^1(\mathbb{N})} + \|x(n)\|_{\ell^1(\mathbb{N})} \underbrace{\leqslant}_{\text{pour } n \geqslant N} \varepsilon + \|x(n)\|_{\ell^1(\mathbb{N})} < +\infty,$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}, x(n) \in \ell^1(\mathbb{N})$.

Approche 2 :
Même astuce d'abord :

$$\|x\|_{\ell^1(\mathbb{N})} \leqslant \|x - x(n)\|_{\ell^1(\mathbb{N})} + \|x(n)\|_{\ell^1(\mathbb{N})}.$$

Par le fait que la suite $(x(n))_n$ soit de Cauchy, pour $\varepsilon > 0$ on a bien un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geqslant N$, $d_1(x(n), x(m)) < \varepsilon$ or

$$d_1(x(n), x(m)) = \|x(n) - x(m)\|_{\ell^1(\mathbb{N})}$$

et puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x(m)_k \xrightarrow[m\to\infty]{} x_k = \lim_{m\to\infty} x(m)_k = \liminf_{m\to\infty} x(m)_k$ le Lemme de Fatou appliquée à la mesure de comptage donne

$$\|x - x(n)\|_{\ell^1(\mathbb{N})} = \left\| \liminf_{m\to\infty} x(m) - x(n) \right\|_{\ell^1(\mathbb{N})} \leqslant \liminf_{m\to\infty} \|x(m) - x(n)\|_{\ell^1(\mathbb{N})} \leqslant \varepsilon \qquad (\star)$$

pour $n \geqslant N$. On conclut de la même manière, mais l'application du Lemme de Fatou est jolie et se retrouve dans de multiples autres preuves analogues, il peut être bon de garder cette idée à l'esprit.

Étape 3 : conclusion. Tout d'abord, $x \in \ell^1(\mathbb{N})$. d'après l'étape 2. Il reste à montrer qu'on a bien $x(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ dans $\ell^1(\mathbb{N})$.
Convergence : $(*)$ (ou $(\star)$) s'écrit alors $d_1(x(n), x) \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $x(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ dans $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$.
On en déduit que toute suite de Cauchy de $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$ converge dans $\ell^1(\mathbb{N})$: $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$ **est un espace métrique complet**.