Analyse – TD Feuille 5 : compacité

Etienne Donier-Meroz - Antoine Roche

18 novembre 2026

Corrigé des exercices 1, 2, 3 et 5.

Exercice 1 – Ensembles de $\mathbb{R}^2$ compacts ou non

$\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie : une partie de $\mathbb{R}^2$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée (théorème de Borel-Lebesgue). On munit $\mathbb{R}^2$ de n'importe quelle norme, par exemple $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$.
Pour les ensembles 1 à 4, on utilise que si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue et $c \in \mathbb{R}$, alors $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = c\} = g^{-1}(\{c\})$ est fermé, comme image réciproque du fermé $\{c\}$ par une application continue. Ici, les fonctions g sont polynomiales, donc continues : **les ensembles 1 à 4 sont fermés**. Tout se joue donc sur le caractère borné.

1. Si $x^2+y^4 = 1$, alors, les deux termes étant positifs, $x^2 \leq 1$ et $y^4 \leq 1$, donc $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. L'ensemble est fermé et borné, pour fermé on peut prendre l'image réciproque du singleton $\{1\}$ par l'application continue $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ par exemple (cf. la remarque générale au début). **Fermé borné en dimension finie donc compact**.

2. Si $x^6+y^2 = 3$, alors $x^6 \leq 3$ et $y^2 \leq 3$, donc $|x| \leq 3^{1/6}$ et $|y| \leq \sqrt{3}$. L'ensemble est fermé et borné : **il est compact**. Même logique pour montrer fermé qu'auparavant.

3. La chose à voir ici est que y^3 peut être négatif, ce qui empêche d'avoir un ensemble borné. Une manière de montrer le caractère non borné est d'écrire que $y^3 = 1-x^2$ et de faire tendre x vers l'infini, $y = (1-x^2)^{1/3}$ satisfait la condition tandis que x s'échappe.
Note : Pas de problème à prendre la racine cubique d'un nombre négatif car $x \mapsto x^{1/3}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Les figures 1 et 2 comparent les ensembles 1 et 3 : le premier est une courbe fermée bornée, le second une courbe dont les deux branches partent à l'infini.

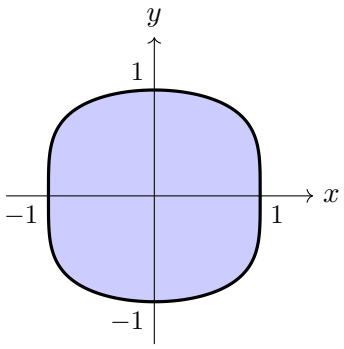


FIGURE 1 – L'ensemble 1 (trait épais), contenu dans le carré $[-1,1]^2$. En couleur : $\{x^2+y^4<1\}$.

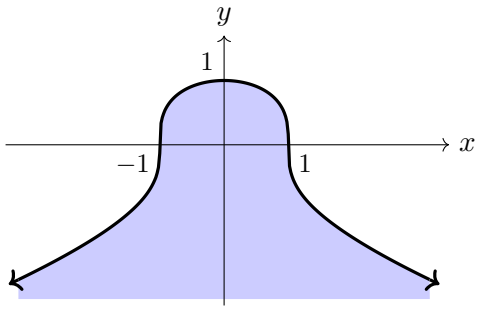


FIGURE 2 – L'ensemble 3 (trait épais) : la courbe $y=(1-x^2)^{1/3}$ est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ et descend vers $-\infty$ quand $|x|\to\infty$. En couleur : $\{x^2+y^3<1\}$, qui n'est pas borné non plus.

4. Même raisonnement avec la racine cinquième, définie sur tout $\mathbb{R}$: pour faire avec des suites cette fois, les points $\left(n,-\sqrt[5]{n^2-1}\right)$ appartiennent à l'ensemble et leur norme tend vers $+\infty$. L'ensemble n'est pas borné : **il n'est pas compact**.

5. L'ensemble $\{(x,y):|x|+|y|\leq 1\}$ est l'image réciproque du fermé $]-\infty,1]$ par l'application continue $(x,y)\mapsto|x|+|y|$: il est fermé. Il est borné, car $|x|+|y|\leq 1$ implique $|x|\leq 1$ et $|y|\leq 1$ (c'est la boule unité fermée de la norme $\|\cdot\|_1$). **Il est compact**.

6. L'ensemble $A:=\{(x,y):|x|+|y|<1\}$ n'est pas fermé. Pour $n\geq 1$, le point $\left(1-\frac{1}{n},0\right)$ appartient à A, et $\left(1-\frac{1}{n},0\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(1,0)\notin A$. Par la caractérisation séquentielle des fermés, A n'est pas fermé, donc **il n'est pas compact**. Si on veut jouer avec les définitions, on peut aussi montrer que l'ensemble est ouvert en appliquant la définition verbatim. Soit $(x,y)\in A$, ainsi, il existe $\varepsilon>0$ tel que $|x|+|y|\leqslant 1-\varepsilon$. Puisque en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et donc définissent les mêmes ouverts, on peut prendre la norme qui est la plus pratique pour notre objectif, ici, la norme 1 marche bien grâce à la structure du problème, soient $(x',y')\in B_1((x,y),r)$ avec $r=\varepsilon/2$, on a donc

$$|x'|+|y'|\leqslant|x-x'|+|x|+|y-y'|+|y|\leqslant 1-r+\big\|(x,y)-(x',y')\big\|_1\leqslant 1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}<1.$$

On en déduit donc que pour tout $(x,y)\in A$ il existe $r>0$ ($r\leqslant\varepsilon/2$ fonctionne) tel que $B((x,y),r)\subset A$.
La figure 3 représente les ensembles 5 et 6.

Exercice 2 – La réunion de la limite d'une suite convergente et des valeurs de cette suite forme un compact

1. On revient à la définition de la compacité par les recouvrements ouverts. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $A\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$.

- Comme $x\in A$, il existe $i_0\in I$ tel que $x\in O_{i_0}$. L'ensemble O_{i_0} étant ouvert, il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\subseteq O_{i_0}$.
- Comme $x_n\to x$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, $\|x_n-x\|<r$, c'est-à-dire $x_n\in B(x,r)\subseteq O_{i_0}$.
- Il reste un nombre fini de points, $x_0,\dots,x_{N-1}$. Pour chaque $k\in\{0,\dots,N-1\}$, il existe $i_{k+1}\in I$ tel que $x_k\in O_{i_{k+1}}$.

Ainsi $A\subseteq O_{i_0}\cup O_{i_1}\cup\cdots\cup O_{i_N}$: on a extrait un sous-recouvrement fini. Donc A **est compact**.

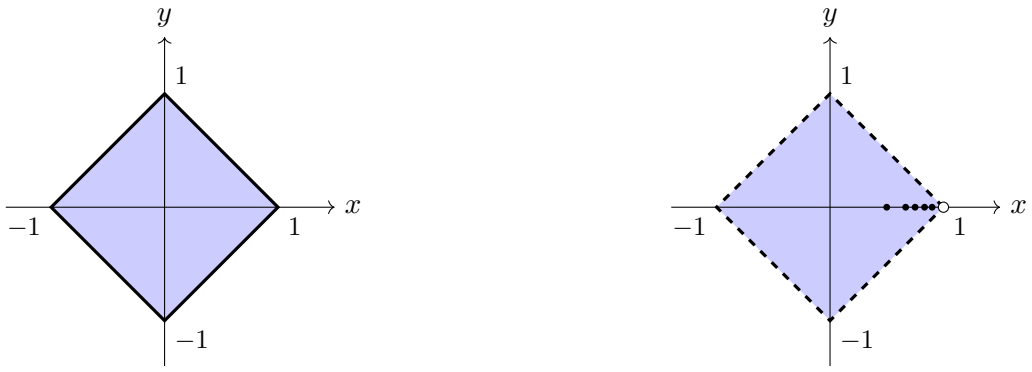


FIGURE 3 – À gauche, l'ensemble 5 (boule unité fermée de $\|\cdot\|_1$) : le bord, en trait plein, fait partie de l'ensemble. À droite, l'ensemble 6 (boule unité ouverte) : le bord, en pointillés, n'en fait pas partie. Les points $\left(1-\frac{1}{n}, 0\right)$ sont dans l'ensemble 6 mais leur limite $(1, 0)$ (cercle vide) n'y est pas.

2. La preuve n'a utilisé qu'une propriété : *tout ouvert contenant x contient tous les x_n à partir d'un certain rang.*

— *Dans un espace métrique* (E, d), cette propriété reste vraie : il suffit de remplacer $\|x_n - x\|$ par $d(x_n, x)$ dans la preuve. La norme n'est donc pas nécessaire et **le résultat reste valide**.

— *Dans un espace topologique* $(E, \mathcal{T})$, la convergence $x_n \to x$ est *définie* par : pour tout ouvert O contenant x, il existe N tel que $x_n \in O$ pour tout $n \geq N$. C'est exactement la propriété utilisée, et la preuve s'applique mot pour mot, sans passer par les boules. **Le résultat reste valide**.

Exercice 3 – Dans un espace métrique compact, une suite possédant une unique valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence

1. Raisonnons par l'absurde et supposons que (x_n) ne converge pas vers x. En niant la définition de la convergence, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ d(x_n, x) \geq \varepsilon \qquad (\star)$$

Cela nous dit qu'il existe une sous suite qui reste loin de x, on va donc construire formellement cette sous suite et appliquer la compacité à celle ci va nous donner une absurdité.

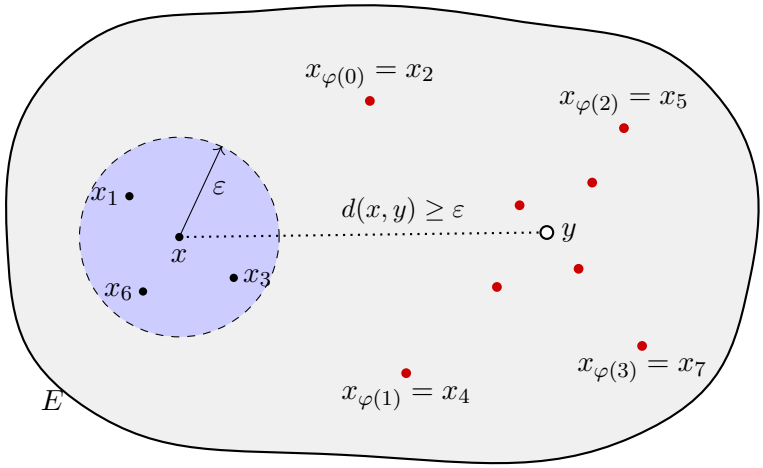


FIGURE 4 – Raisonnement par l'absurde de l'exercice 3. Si (x_n) ne converge pas vers x, une infinité de termes (en rouge) restent hors de la boule $B(x, \varepsilon)$: ils forment une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_k$. Par compacité de E, celle-ci admet une valeur d'adhérence y, qui vérifie $d(x, y) \geq \varepsilon$, donc $y \neq x$: contradiction avec l'unicité de la valeur d'adhérence. (La numérotation des termes est arbitraire.)

Construction d'une sous-suite qui reste loin de x. On construit par récurrence une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $d(x_{\varphi(k)}, x) \geq \varepsilon$ pour tout k.
Pour l'initialisation : on choisit $\varphi(0)$ tel que $d(x_{\varphi(0)}, x) \geq \varepsilon$ (appliquer la propriété avec $N = 0$).
Maintenant, supposons que $(\varphi(0), \ldots, \varphi(n))$ sont construits (et que donc on a bien les n premiers termes de notre sous suite tels que pour tout $k \in [\![0, n, ,]\!] d(x_{\varphi(k)}, x) \geqslant \varepsilon$).
On applique la propriété $(\star)$ avec $N = \varphi(k) + 1$: il existe donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $d(x_{\varphi(k+1)}, x) \geq \varepsilon$. Par récurrence, on a bien construit notre sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(n)}, x) \geqslant \varepsilon$.

Utilisation de la compacité. La suite $(x_{\varphi(n)})_n$ est à valeurs dans l'espace métrique compact E. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite $(x_{\varphi(\psi(n))})_n$ qui converge vers un certain $y \in E$. Ainsi y est une valeur d'adhérence de $(x_{\varphi(n)})_n$, donc de $(x_n)_n$ (rappel de l'indication). Par unicité de la valeur d'adhérence, $y = x$. C'est absurde bien sur car $d(x, y) \geqslant \varepsilon$. On conclut que (x_n) **converge vers** x.

Exercice 5 – Autour du théorème de compacité de Riesz

1. Pour $f \in E$, on a $d_\infty(f, 0_E) = \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Donc

$$f \in B \iff \forall x \in [0, 1],\ -1 \leq f(x) \leq 1.$$

Les fonctions de B sont exactement les fonctions continues dont le graphe reste dans la bande $[0, 1] \times [-1, 1]$.

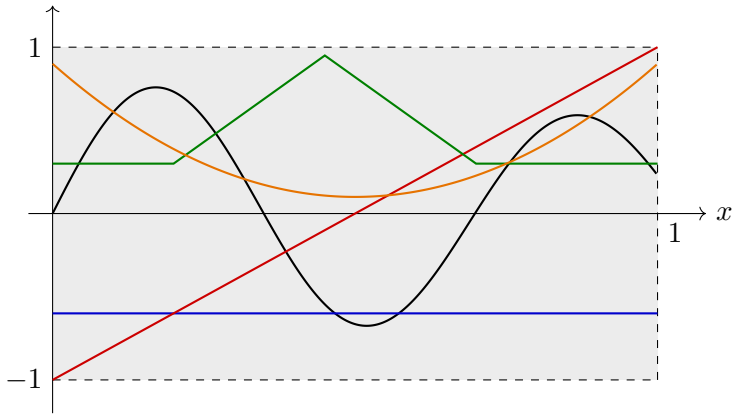


FIGURE 5 – Quelques fonctions de B : la fonction constante $x \mapsto -0{,}6$ (en bleu), la fonction affine $x \mapsto 2x - 1$ (en rouge), une fonction « triangle » (en vert), la parabole $x \mapsto 0{,}9 - 3{,}2\,x(1-x)$ (en orange) et une fonction oscillante (en noir). Toutes ont leur graphe dans la bande $[0,1] \times [-1,1]$ (en gris).

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = [2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$, on peut écrire l'expression de la fonction f_n en utilisant des fonctions affines par morceaux. La formule générique pour une fonction affine qui prend pour valeurs x et y à deux points distincts z_1 et z_2 est

$$f(t) = x + \frac{t - z_1}{z_2 - z_1}(y - x)$$

On note $c_n = (2^{-(n+1)} + 2^{-n})/2$ le milieu de l'intervalle I_n et on trouve

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x - c_n}{2^{-(n+1)} - c_n} & \text{si } x \in [2^{-(n+1)}, c_n] \\ 1 - \frac{x - c_n}{2^{-n} - c_n} & \text{si } x \in [c_n, 2^{-n}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

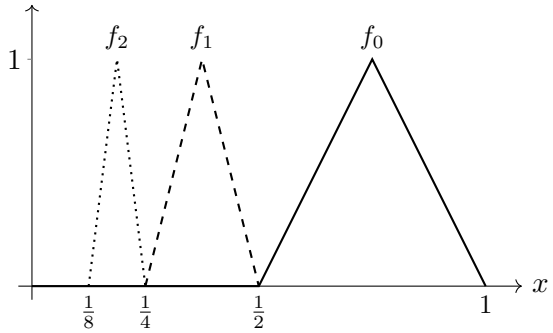


FIGURE 6 – Les fonctions f_0, f_1 et f_2 : des « triangles » de hauteur 1, nuls hors de $I_0 = [\frac{1}{2}, 1]$, $I_1 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ et $I_2 = [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$ respectivement (échelle verticale réduite).

3. Si $n = m$, $d_\infty(f_n, f_m) = 0$. Soient $n \neq m$, disons $n < m$. Les intervalles I_n et I_m ont des intérieurs disjoints, puisque $\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$; ils ont au plus un point commun, où les deux fonctions sont nulles. Pour tout $x \in [0,1]$, au plus l'un des deux réels $f_n(x)$, $f_m(x)$ est non nul, donc

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \max\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leq 1.$$

De plus, en $x = c_n$, qui est à l'intérieur de I_n donc hors de I_m, on a $|f_n(c_n) - f_m(c_n)| = 1 - 0 = 1$. Ainsi

$$d_\infty(f_n, f_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m, \\ 1 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

4. Supposons B compact. Comme (E, d_∞) est un espace métrique, B est séquentiellement compact (Bolzano-Weierstrass). Puisqu'on a supposé B compact, la suite $(f_n)_n \in B^{\mathbb{N}}$ admet donc une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ convergente, donc de Cauchy en particulier. Il existerait alors N tel que pour tous $n, m \geq N$, $d_\infty(f_{\varphi(n)}, f_{\varphi(m)}) < \frac{1}{2}$. Mais pour $n \neq m$, $\varphi(n) \neq \varphi(m)$ (φ est strictement croissante), donc $d_\infty(f_{\varphi(n)}, f_{\varphi(m)}) = 1$ d'après la question 3. C'est absurde.
Donc **la boule unité fermée B de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte**. C'est cohérent avec le théorème de Riesz, puisque E est de dimension infinie : les f_n forment une famille libre, étant non nulles et à supports d'intérieurs disjoints.