Feuille de révision analyse

Antoine Roche

23 octobre 2026

1 Disclaimer

Ce document est une feuille de révision pour préparer l'examen de mi-parcours destinée aux 1A-Eco pour le cours d'analyse du semestre 1. Le document est centré sur les TD 1, 2 et 3 (exercices corrigés en séance). Il est destiné purement à vous aider, notez cependant que ce n'est pas un document « officiel » créé par votre professeur Etienne Donier-Meroz et qu'il ne fait donc aucune autorité quelle qu'elle soit. En cas de doute sur une affirmation, votre cours et tout le contenu produit par votre professeur sont donc les seules et uniques références.

Table des matières

1 Disclaimer **1**

2 Feuille de révision **2**

2.1 Distances et espaces métriques 2
2.2 Intérieur, adhérence, frontière 3
2.3 Densité 5
2.4 Normes et équivalence de normes 5
2.5 Suites réelles, suites extraites, valeurs d'adhérence 7
2.6 Continuité 9
2.7 Applications linéaires continues et norme d'opérateur 10

2 Feuille de révision

Dans la suite de cette section, en l'absence de mention contraire, on se place dans un espace métrique (E, d) générique. Pour $A \subseteq E$ quelconque, on dit que A est une partie de E.

2.1 Distances et espaces métriques

Définition : distance

Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tous $x, y, z \in E$:

- **séparation :** $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- **symétrie :** $d(x, y) = d(y, x)$;
- **inégalité triangulaire :** $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Méthode : montrer qu'une application est une distance

Toujours la même chose : on vérifie les axiomes un par un. Penser en premier lieu à vérifier que l'application est **bien définie** si ce n'est pas évident (par exemple $\delta(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ n'a de sens que parce que $x, y \neq 0$ sur $E =]0, +\infty[$). En général la seule vraie difficulté est l'inégalité triangulaire. Deux astuces classiques motivées par les exercices de TD (à garder dans un coin de la tête n'apprenez pas cela par cœur) :

1. **Composer une distance par une fonction croissante et sous-additive.** Si $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est croissante, sous-additive ($\varphi(a + b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b)$) et vérifie $\varphi(t) = 0 \iff t = 0$, alors $d(u, v) = \varphi(|u - v|)$ est une distance sur $\mathbb{R}$:

$$d(u, w) = \varphi(|u - w|) \leqslant \varphi(|u - v| + |v - w|) \leqslant \varphi(|u - v|) + \varphi(|v - w|).$$

   (croissance de φ puis sous-additivité).

2. **Composer par une injection.** Si $f : E \to \mathbb{R}$ est injective, alors $\delta(x, y) = |f(x) - f(y)|$ est une distance sur E : la séparation vient de l'injectivité, l'inégalité triangulaire est héritée de celle de $|\cdot|$.

Exemple (TD1, Ex. 1)

$\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ est croissante ($\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$) et sous-additive : pour $a, b \geqslant 0$,

$$\varphi(a + b) = \frac{a}{1 + a + b} + \frac{b}{1 + a + b} \leqslant \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Donc $d(u, v) = \frac{|u-v|}{1+|u-v|}$ est une distance sur $\mathbb{R}$: c'est le cas 1 de la méthode ci-dessus où l'on compose la distance induite par la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ par φ sous-additive et croissante.

Méthode : déterminer une boule ouverte pour une distance donnée

Les boules (et donc les ouverts) dépendent de la distance considérée. Pour déterminer $B(a, r) = \{x \in E : d(a, x) < r\}$, on procède **par équivalences**, en réécrivant $d(a, x) < r$ comme un système d'inégalités sur x. Attention aux inversions d'inégalités (passage à l'inverse, etc.) et aux contraintes déjà imposées par E.

Exemple (TD1, Ex. 2)

Sur $E =]0, +\infty[$ avec $\delta(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$: $\delta(1,x) < 1 \iff 0 < \frac{1}{x} < 2 \iff x > \frac{1}{2}$, donc $B(1,1) = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Plus généralement, pour $a \in E$ et $r > 0$, $\delta(a,x) < r \iff \frac{1}{a} - r < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} + r$ et

$$B(a,r) = \left]\frac{a}{1+ar}, \frac{a}{1-ar}\right[\text{ si } r < \frac{1}{a}, \qquad B(a,r) = \left]\frac{a}{1+ar}, +\infty\right[\text{ si } r \geqslant \frac{1}{a}.$$

Réciproquement tout intervalle $]\alpha, \beta[$ avec $0 < \alpha < \beta \leqslant +\infty$ est une boule (on résout le système en (a,r)) : les boules de δ sont exactement ces intervalles.

Définition : partie bornée

$A \subseteq E$ est bornée pour d s'il existe $M \geqslant 0$ tel que $d(x,y) \leqslant M$ pour tous $x, y \in A$ (diamètre fini). De façon équivalente, on peut aussi dire que A est incluse dans une boule, de rayon majoré par M a fortiori (inégalité triangulaire).

Pour d'éventuels raisonnements par l'absurde, il est utile de connaître la négation de la propriété de « bornitude » (qu'on peut retrouver bien sûr en prenant la négation de la propriété):

Négation : pour tout $M \geqslant 0$, il existe $x, y \in A$ avec $d(x,y) > M$. En pratique : on fixe un point $x \in A$ et on montre qu'on peut trouver une suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ avec $d(x, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Exemple (TD1, Ex. 2.3)

On rappelle que dans l'exercice, pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\delta(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$. $A =]0,1]$ n'est pas bornée pour δ : $\delta\left(1, \frac{1}{n}\right) = n - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Pourtant A est bornée pour $|\cdot|$.
Remarque bonus (non centrale) : Notez que δ et $|\cdot|$ ont les mêmes boules ouvertes (donc les mêmes ouverts) et pourtant n'ont pas les mêmes ensembles bornés. En somme, le caractère borné dépend de la distance, pas seulement de la topologie (la topologie est l'ensemble des ouverts).

2.2 Intérieur, adhérence, frontière

On reste dans le cadre d'un espace métrique (E,d) et $A \subseteq E$.

Définition : intérieur

$\mathring{A}$ est la réunion des ouverts contenus dans A : c'est le **plus grand ouvert contenu dans** A. En particulier, pour tout ouvert $O \subseteq A$, on a $O \subseteq \mathring{A}$ (inclusion immédiate très utile, même si vous ne parvenez pas à montrer que l'intérieur de A est égal à un ensemble donné, cette propriété vous donne souvent une inclusion gratuite !).
Caractérisation : $x \in \mathring{A} \iff \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$.
Négation : $x \notin \mathring{A} \iff \forall r > 0,\ \exists b \in B(x,r)$ avec $b \notin A$ (toute boule centrée en x « déborde » de A).

Note : La caractérisation est très utile à garder en tête, par exemple, lors d'un raisonnement par l'absurde pour montrer qu'un certain $x \notin \mathring{A}$, supposer que $x \in \mathring{A}$ et utiliser cette caractérisation vous permet de considérer la boule ouverte $B(x,r) \subseteq A$ et d'arriver à une absurdité.

Définition : adhérence

$\overline{A}$ est l'intersection des fermés contenant A : c'est le **plus petit fermé contenant** A. En particulier, pour tout fermé F tel que $A \subseteq F$, on a $\overline{A} \subseteq F$ (idem que pour l'intérieur, garder en tête cette inclusion souvent gratuite).
Deux caractérisations à connaître par cœur :

- **voisinages :** $x \in \overline{A} \iff \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$;
- **séquentielle :** $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Négation : $x \notin \overline{A} \iff \exists r > 0,\ B(x,r) \cap A = \emptyset$.

Définition : frontière, ouverts, fermés

On a toujours $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$, et $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

- A est ouvert $\iff A = \mathring{A} \iff A \subseteq \mathring{A}$, i.e. $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$.
- A est fermé $\iff A = \overline{A} \iff \overline{A} \subseteq A \iff$ son complémentaire est ouvert.

Méthode : déterminer l'intérieur

1. Trouver un ouvert $O \subseteq A$ « évident » : on a alors $O \subseteq \mathring{A}$.
2. Pour chaque point restant $x \in A$ mais $x \notin O$, montrer $x \notin \mathring{A}$ via la négation : pour tout $r > 0$, exhiber explicitement un $b \in B(x,r) \setminus A$ (ou utiliser $\mathring{A} \subseteq A$ pour les points hors de A).

Intuitivement, on montre que O est un ouvert inclus dans A donc inclus dans $\mathring{A}$ et qu'on ne peut pas le faire grossir encore (ajouter encore des $x \in A$), donc O est le plus gros ouvert qu'on peut inclure dans A, cela reflète la définition.

Argument de cardinalité : dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, toute boule ouverte $]x-r, x+r[$ est non dénombrable, donc une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des valeurs d'une suite) est d'intérieur vide.

Exemple (TD1, Ex. 3.2 et 3.3)

- Pour l'argument classique, trouver un ouvert inclus dans A et montrer qu'on ne peut pas le faire grossir davantage, voir le TD1, Exercice 3, Question 2 sur l'intérieur.
- Pour l'argument sur la cardinalité/dénombrabilité, voir par exemple ce même exercice question 3 sur l'intérieur.

Méthode : déterminer l'adhérence

Il n'y a jamais qu'une seule méthode absolue qui marche à tous les coups, une méthode souvent efficace cependant est la suivante :

1. $\subseteq$: trouver un fermé F avec $A \subseteq F$, alors $\overline{A} \subseteq F$.
2. $\supseteq$: écrire chaque point du candidat comme limite d'une suite d'éléments de A (caractérisation séquentielle).

Si l'ensemble est déjà fermé, son adhérence est lui-même.

Exemple (TD1, Ex. 3.2)

Pour l'adhérence, ce chemin est exactement celui suivi pour déterminer l'adhérence de A dans l'exercice 3, question 2 du TD1.

Remarque : Dans certains cas plus complexes, cf. TD1, Ex. 3.3 pour l'adhérence, on peut d'abord montrer que $F \subseteq \overline{A}$ pour un certain fermé F, par exemple avec la caractérisation séquentielle mais l'inclusion inverse est plus dure. On peut procéder par contraposée dans ce cas : on prend $x \notin F$ et on montre que nécéssairement $x \notin \overline{A}$, donc nécessairement, $x \in \overline{A} \implies x \in F$ et $\overline{A} \subseteq F$. Lorsque l'on procède comme cela, il est important de connaître les caractérisations de l'adhérence pour montrer que $x \notin F \implies x \notin \overline{A}$, par exemple, montrer que si $x \notin F$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que

$B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ suffit.

2.3 Densité

Définition : partie dense

A est dense dans E si $\overline{A} = E$. Deux caractérisations, directement issues de celles de l'adhérence :

- **boules** : $\forall x \in E,\ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, i.e. il existe $y \in A$ avec $d(y,x) < r$;
- **séquentielle** : $\forall x \in E,\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Méthode : montrer une densité

Fixer $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ et construire **explicitement** un élément de A à distance $< \varepsilon$ de x (ou une suite d'éléments de A qui tend vers x).

Exemple (TD1, Ex. 6.1) : suites à support fini dans $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$

Pour les (suites de) suites, l'approche usuelle est de tronquer. Soit $u \in c_0$ et $\varepsilon > 0$; la suite u convergeant vers 0, il existe N tel que $|u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N$. La suite tronquée $v_n = u_n$ si $n < N$, $v_n = 0$ sinon, est à support fini (au plus N termes non nuls) et $\|u - v\|_\infty = \sup_{n \geqslant N} |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Donc $\overline{A} = c_0$ car tout élément de c_0 peut être atteint par la limite d'une suite d'éléments de A.

Exemple : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}, \qquad \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

et ces deux suites tendent vers x.

Théorème : deux parties denses disjointes (TD1, Ex. 8)

Si A et B sont denses dans E et $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathring{A} = \mathring{B} = \emptyset$. Plus généralement, **le complémentaire d'une partie dense est d'intérieur vide**. Application : $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$.

Note : Bien évidemment ce théorème n'est pas à connaître par cœur, cependant sa preuve est instructive en termes de manipulations d'objets de topologie donc je mentionne le résultat et sa preuve ici.

Méthode : preuve par l'absurde avec la définition de l'intérieur

Si $x \in \mathring{A}$, il existe $r > 0$ avec $B(x,r) \subseteq A$. Par densité de B, il existe $y \in B$ avec $d(x,y) < r$, donc $y \in B(x,r) \subseteq A$, i.e. $y \in A \cap B$: absurde. (Variante séquentielle : $b_n \to x$ avec $b_n \in B$, donc $b_N \in B(x,r) \subseteq A$ pour N assez grand.)
Réflexe : dès qu'on suppose $x \in \mathring{A}$, écrire immédiatement « il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq A$ ».

2.4 Normes et équivalence de normes

Définition : norme

Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

- **séparation :** $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

- **homogénéité :** $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
- **inégalité triangulaire :** $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Méthode : montrer qu'une application est une norme

1. **Bonne définition/finitude (si besoin).** Pour citer quelques cas de figure : une fonction continue sur le compact $[a, b]$ est bornée, donc $\|f\|_\infty < \infty$; une suite convergente est bornée, donc $\|\cdot\|_\infty$ est finie sur c_0.
2. **Homogénéité et inégalité triangulaire.** Souvent héritées d'une norme connue et de propriétés usuelles d'autres potentiels objets impliqués. Par exemple la linéarité de la dérivation : $(f + g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$).
3. **Séparation.** À traiter au cas par cas.

Exemple (TD3, Ex. 3.1 ; TD2, Ex. 2)

- $\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ sur $C^1([0, 1], \mathbb{R})$: si $\|f\|_F = 0$ alors $0 \leqslant \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_F = 0$, donc $f = 0$.
- $N'_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f'|$ sur $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$: si $N'_\infty(f) = 0$, f est constante donc $f = f(0) = 0$. **La condition $f(0) = 0$ est essentielle** : sur $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ tout entier, N'_∞ n'est pas une norme (les constantes non nulles sont de « norme » nulle).

Définition : normes équivalentes

$\|\cdot\|_A$ et $\|\cdot\|_B$ sont équivalentes s'il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que $C_1 \|x\|_A \leqslant \|x\|_B \leqslant C_2 \|x\|_A$ pour tout $x \in E$. Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts, fermés et suites convergentes. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes : les phénomènes de non-équivalence n'existent qu'en dimension infinie.

Méthode : montrer que deux normes ne sont *pas* équivalentes

On nie la définition. S'il y avait équivalence, on aurait en particulier $\|x\|_B \leqslant C_2 \|x\|_A$, donc le quotient $\|x\|_B / \|x\|_A$ serait borné sur $E \setminus \{0\}$. Il suffit donc de trouver une suite $(f_n) \in (E \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{\|f_n\|_B}{\|f_n\|_A} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Alternative (c'est équivalent) : trouver une suite qui converge pour une norme mais pas pour l'autre.
Construire la suite : on cherche des fonctions de plus en plus « concentrées » (pic de plus en plus haut et de plus en plus fin), ou bornées mais à dérivée qui explose. Souvent une inégalité est déjà connue dans un sens ; il ne reste qu'à casser l'autre.

Exemple (TD2, Ex. 1) : les fonctions affines par morceaux et la fonction « pic »

Sur $C([a, b], \mathbb{R})$, $f_n(x) = n \max\left(0, 1 - \frac{n(x-a)}{b-a}\right)$ (triangle de hauteur n et de base $\frac{b-a}{n}$). Avec le changement de variables $t = \frac{n(x-a)}{b-a}$ (ou l'aire d'un triangle) :

$$\|f_n\|_\infty = n, \qquad \|f_n\|_1 = \frac{b-a}{2}, \qquad \|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{n(b-a)}{3}},$$

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{2n}{b-a}, \qquad \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = \sqrt{\frac{3n}{b-a}}, \qquad \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = 2\sqrt{\frac{n}{3(b-a)}},$$

qui tendent tous vers $+\infty$: les trois normes sont deux à deux non équivalentes. Dans l'autre sens, on a bien $\|f\|_1 \leqslant (b-a)^{1/2}\|f\|_2$ (Cauchy–Schwarz) et $\|f\|_2 \leqslant (b-a)^{1/2}\|f\|_\infty$.
(Version « convergence » : $g_n = f_n/n$ vérifie $\|g_n\|_1 = \frac{b-a}{2n} \to 0$ mais $\|g_n\|_\infty = 1$.)

Exemple (TD2, Ex. 2) : l'exemple canonique $t \mapsto t^n$

Sur un espace de fonctions C^1, les fonctions « pic » (non dérivables) ne conviennent plus. **Réflexe** : penser à $f_n : t \in [0,1] \mapsto t^n$ (et ses variantes, $(1-t)^n$, etc.). Elle est C^1, vaut 0 en 0, reste bornée par 1 mais sa dérivée explose :

$$N_\infty(f_n) = 1, \qquad N'_\infty(f_n) = f'_n(1) = n, \qquad \frac{N'_\infty(f_n)}{N_\infty(f_n)} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Autre candidat : $f_n(x) = \sin(2nx)$, avec $N_\infty(f_n) = 1$ et $N'_\infty(f_n) = 2n$. L'intuition sous-jacente centrale est d'obtenir des tangentes de plus en plus pentues sans perdre le caractère borné.

Morale de l'histoire :
Pour résumer, les fonctions affines par morceaux (continues) et l'exemple type de $f_n : t \mapsto t^n$ (C^1) suffisent dans une grande partie des cas.

- D'une part, les fonctions affines par morceaux permettent un contrôle des normes L^p (donc normes 1 et 2 en particulier) efficace car on peut ajuster la longueur de leur base et leur hauteur, ce qui fixe l'aire sous la courbe et donc les normes basées sur ces intégrales. Elles permettent aussi de faire « exploser » la norme infinie avec des pics de plus en plus hauts et fins.
- D'autre part, les fonctions de la forme $t \mapsto t^n$ sont très utiles pour des normes basées sur des dérivées de la fonction, car leur norme infinie reste stable tandis que les dérivées deviennent de plus en plus grandes.

2.5 Suites réelles, suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition : suite extraite, valeur d'adhérence

Une suite extraite (ou sous-suite) de u est $(u_{\varphi(n)})_n$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (extractrice) ; on a alors $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout n.
x est **valeur d'adhérence** de (x_n) dans (E,d) si $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists m \geqslant N,\ d(x_m, x) < \varepsilon$; de façon équivalente, x est limite d'une suite extraite. Une infinité de termes sont arbitrairement proches de x, mais pas forcément tous à partir d'un certain rang (sinon x serait la limite).

Théorème : suites monotones (TD2, Ex. 3)

Très important : une suite croissante admet toujours une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, égale à $\sup_n u_n$.

- Si u est croissante et admet une suite extraite majorée, alors u converge (dans $\mathbb{R}$) : si $u_n \to +\infty$, toute suite extraite tendrait vers $+\infty$.
- Si u est croissante et admet une suite extraite convergente vers l, alors $u_n \to l$ (unicité de la limite). En effet, u croissante donc a une limite dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, si cette limite était l'infini toute suite extraite divergerait donc u a une limite réelle, l'unicité conclut.

Méthode : construire une suite extraite par récurrence

Pour construire $(u_{\varphi(n)})$ vérifiant une propriété $\mathcal{P}_n$:

- **Initialisation** : construire $\varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(0)}$ vérifie $\mathcal{P}_0$.

- **Hérédité** : supposant construits $\varphi(0) < \cdots < \varphi(n)$, trouver un indice $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $u_{\varphi(n+1)}$ vérifie $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ne pas oublier la stricte croissance de φ : on cherche toujours le nouvel indice *après* $\varphi(n)$. L'exemple suivant rend cette démarche concrète.

Exemple (TD2, Ex. 3.3) : u non majorée $\Rightarrow +\infty$ valeur d'adhérence

Sans détailler autant que dans la correction, pour reprendre les notations de la méthode précédente, la proposition $\mathcal{P}_n$ est la suivante :

$$\mathcal{P}_n : \begin{pmatrix} \text{les termes } (u_{\varphi(0)}, \dots, u_{\varphi(n)}) \text{ satisfont } u_{\varphi(k)} \geqslant k \text{ pour tout } k \in [\![0, n]\!] \\ \text{et } \varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Remarque centrale : Soit $M \geqslant 0$ un réel, pour tout N, $\{u_m,\ m > N\}$ n'est pas majoré (sinon u serait majorée par $\max(M, u_0, \dots, u_N)$).

- **Initialisation :** On choisit $\varphi(0)$ avec $u_{\varphi(0)} \geqslant 0$, cela existe par la remarque précédente. Cela nous donne bien $\mathcal{P}_0$.
- **Récurrence :** On suppose $\mathcal{P}_n$ vérifiée et on applique à nouveau la remarque précédente à la partie $\{u_m, m > \varphi(n)\}$. Cela donne un indice $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ avec $u_{\varphi(n+1)} \geqslant n+1$. $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Ainsi $u_{\varphi(n)} \geqslant n \to +\infty$.

Définition : limites inférieure et supérieure (TD2, Ex. 4)

Avec $a_k = \inf_{n \geqslant k} u_n$ et $b_k = \sup_{n \geqslant k} u_n$:

$$\liminf u_n = \sup_k a_k = \lim_k a_k, \qquad \limsup u_n = \inf_k b_k = \lim_k b_k.$$

(a_k) est croissante et (b_k) décroissante (passer à une partie plus petite augmente l'inf et diminue le sup), d'où l'existence des limites dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Théorème

- $\liminf u_n$ (resp. $\limsup u_n$) est la plus petite (resp. plus grande) valeur d'adhérence de u dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- u converge dans $\mathbb{R} \iff \liminf u_n = \limsup u_n \in \mathbb{R}$.
- Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge ($\mathbb{R}$ est complet).

Méthode : travailler avec inf et sup

On utilise la **caractérisation de la borne inférieure/supérieure** :

- $L = \inf_k b_k$ et $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ il existe k_0 avec $b_{k_0} < L + \varepsilon$;
- $L - \varepsilon < b_n = \sup_{m \geqslant n} u_m \Rightarrow L - \varepsilon$ n'est pas un majorant, donc il existe $m \geqslant n$ avec $u_m > L - \varepsilon$.

2.6 Continuité

Définition : continuité et caractérisations

f est continue en a si elle admet une limite en a égale à $f(a)$; elle est continue si elle est continue en tout point (notion **locale**).

- **Séquentielle** : f continue en $a \iff$ pour toute suite $x_n \to a$, $f(x_n) \to f(a)$.
- **Négation** : f n'est pas continue en $a \iff$ il existe *une* suite $x_n \to a$ telle que $f(x_n) \not\to f(a)$.
- **Images réciproques** : f continue $\iff$ l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) est ouverte (resp. fermée). Surtout utile dans l'autre sens : pour montrer qu'une partie est fermée, l'écrire comme $f^{-1}(F)$ avec F fermé et f continue (ex. $\ker u = u^{-1}(\{0\})$).

Bien sûr, sommes, produits, composées de fonctions continues sont continues ; polynômes, fractions rationnelles (là où le dénominateur ne s'annule pas), exp, log, cos... sont continues.

Méthode : étudier la continuité d'une fonction

Toujours chercher à se simplifier la vie d'entrée de jeu, on élimine tous les endroits où aucun problème ne se pose et on se concentre sur les points où la continuité n'est pas garantie. Concrètement :

1. Repérer les points qui posent problème (raccords, points où la formule change).
2. Sur les ouverts où f coïncide avec une fonction continue connue : rien à faire.
3. Aux points de raccord : en dimension 1, il suffit d'étudier les limites à gauche et à droite pour prouver ou nier la continuité en un point donné.

   En dimension $d \geqslant 2$, c'est souvent plus complexe et il n'y a pas de manière générale de montrer la continuité, c'est au cas par cas et vous serez aidés si besoin, nous n'avons pas traité cela en TD. Par contre pour montrer que la fonction n'est **pas** continue en un point (ce que nous avons fait en TD), il suffit de trouver une suite qui donne une mauvaise limite (pas égale à la valeur de la fonction au point limite). Souvent les suites qui marchent bien sont les suites d'éléments de la diagonale, par exemple les $(1/n, 1/n)$.

Exemple (TD3, Ex. 1.1)

$f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ (bien définie car $x \geqslant \lfloor x \rfloor$). Sur $]n, n+1[$, $f(x) = n + \sqrt{x-n}$ est continue. En $n \in \mathbb{Z}$: à droite $f(x) \to n = f(n)$; à gauche, $\lfloor x \rfloor = n-1$ et $f(x) = n - 1 + \sqrt{x - (n-1)} \to n - 1 + 1 = n = f(n)$ aussi. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Attention : fonctions de plusieurs variables

Pour montrer la continuité en $(0,0)$ (ou à un point quelconque du domaine en réalité), la limite doit être la même **quelle que soit la façon** dont $(x,y) \to (0,0)$: vérifier les suites $(\frac{1}{n}, 0)$ et $(0, \frac{1}{n})$ ne suffit pas. Pour $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$: sur la diagonale, $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \not\to 0$, donc f n'est pas continue en $(0,0)$. Idée : chercher une direction où numérateur et dénominateur sont du même ordre.

Exemple (TD3, Ex. 1.3) : indicatrice de $\mathbb{Q}$, discontinue partout

On note $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On utilise la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $a \in \mathbb{Q}$: on considère $(x_n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (pas besoin de donner une expression, on sait qu'une telle suite existe par densité). Alors pour tout entier n, on a $f(x_n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \neq f(a) = 1$ car $a \in \mathbb{Q}$. Ainsi f n'est pas continue en a.

On fait de même pour l'autre cas où $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en utilisant une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ cette fois.
Au final, cela montre que pour tout $a \in \mathbb{R}$ (quel qu'il soit), f ne peut être continue en a donc f n'est continue en aucun point.

2.7 Applications linéaires continues et norme d'opérateur

Théorème : continuité des applications linéaires

Soit $L : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes : L continue ; L continue en 0 ; L **bornée** :

$$\exists C > 0,\ \forall x \in E,\ \|L(x)\|_F \leqslant C \|x\|_E .$$

La plus petite telle constante (le plus petit majorant universel) est la norme d'opérateur :

$$|||L||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|L(x)\|_F .$$

Elle dépend des normes choisies au départ et à l'arrivée.

Méthode : montrer la continuité et calculer $|||L|||$

1. **Bonne définition (si nécessaire) :** vérifier que $L(x)$ est bien dans l'espace d'arrivée (ex. par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \int_0^x f$ est C^1 si f est continue).
2. **Linéarité :** Au cas par cas car cela dépend des objets impliqués (linéarité de l'intégrale ou de la dérivée par exemple).
3. **Majoration :** montrer $\|L(x)\|_F \leqslant C \|x\|_E$ pour tout x. Cela donne à la fois la continuité et $|||L||| \leqslant C$ (l'inégalité vient car si $x = 0$ l'inégalité est triviale et sinon on peut diviser par $\|x\|_E$, le quotient est majoré par C pour tout x non nul et le résultat vient en passant au sup).
4. **Optimalité :** Si demandé, exhiber un $x_0 \neq 0$ (resp. une suite) réalisant l'égalité (resp. dont la limite réalise l'égalité) $\|L(x_0)\|_F = C \|x_0\|_E$; alors $|||L||| \geqslant \frac{\|L(x_0)\|_F}{\|x_0\|_E} = C$. Pour trouver x_0, on peut regarder quand les inégalités de l'étape 3 sont des égalités parfois (Cauchy-Schwarz etc.).

Exemple (TD3, Ex. 3) : la primitive

$T : (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C^1([0,1]), \|\cdot\|_F)$, $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Déjà T est bien linéaire.
On a $|T(f)(x)| \leqslant x \|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ et $T(f)' = f$ par le théorème fondamental de l'analyse, donc $\|T(f)\|_F \leqslant 2\|f\|_\infty$ et donc $|||T||| \leqslant 2$, cela nous donne la continuité de T et une majoration de sa norme d'opérateur.
Pour l'égalité maintenant :
On prend $f = 1$: $T(f)(x) = x$, $\|T(f)\|_F = 1 + 1 = 2 = 2\|f\|_\infty$, donc $|||T||| = 2$.

Exemple (TD3, Ex. 4)

Sur $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_1)$, $\Phi(f)(x) = \int_0^x \varphi f$ avec φ continue : $|\Phi(f)(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$, puis en intégrant sur $[0,1]$, $\|\Phi(f)\|_1 \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$. Donc Φ est continue et $|||\Phi||| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.
Ici on n'a qu'une majoration de la norme d'opérateur de Φ, on a aussi la continuité Φ.

Théorème : additive et continue en $0 \Rightarrow$ linéaire (TD3, Ex. 5)

Si E, F sont des $\mathbb{R}$-e.v.n. et $f : E \to F$ est additive et continue en 0_E (avec $f(0_E) = 0_F$), alors f est linéaire.

Remarque : Idem, bien évidemment à ne pas connaître par cœur mais la preuve par densité et continuité est instructive.

Méthode : l'escalier $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

On fixe x et on montre $f(\lambda x) = \lambda f(x)$:

- $\lambda \in \mathbb{N}$: récurrence, $f((n+1)x) = f(nx) + f(x)$;
- $\lambda \in \mathbb{Z}$: $f(x) + f(-x) = f(0_E) = 0_F$, donc $f(-x) = -f(x)$;
- $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: $qf\left(\frac{p}{q}x\right) = f(px) = pf(x)$;
- $\lambda \in \mathbb{R}$: **densité** de $\mathbb{Q}$, $\lambda_n \to \lambda$ rationnels, et $f(\lambda_n x) = f(\lambda x) + f((\lambda_n - \lambda)x)$ avec $(\lambda_n - \lambda)x \to 0_E$, donc par continuité en 0, $f(\lambda_n x) \to f(\lambda x)$; or $f(\lambda_n x) = \lambda_n f(x) \to \lambda f(x)$: unicité de la limite.

Schéma très général : on prouve une propriété sur $\mathbb{Q}$ par l'algèbre, puis on l'étend à $\mathbb{R}$ par densité et continuité.