ENSAE 2025-2026
TD 1 : Théorie des probabilités
Tentative de corrigé (Exercices 1 à 6)

Antoine Roche

Avertissement: Ce corrigé des exercices 1 à 6 n'est pas un corrigé officiel produit par votre professeur Jaouad Mourtada et n'engage que moi. Pour me signaler une erreur ou une typo ou même me poser une question sur ce TD, n'hésitez pas à m'envoyer un mail.

Exercice 1

1. Supposons $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{C})$ et $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{B})$.

Comme $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu qui contient $\mathcal{B}$ et que $\sigma(\mathcal{B})$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}$ on a par définition $\sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{C})$.

La second inclusion se prouve de manière symmétrique. On conclut donc $\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{C})$.

2. Soient $a < b$.

Première égalité. Si $x \in [a,b]$, alors pour tout $n \geqslant 1$, $a - \frac{1}{n} < a \leqslant x \leqslant b < b + \frac{1}{n}$, donc $x \in \bigcap_n]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. Réciproquement, si x appartient à cette intersection, alors pour tout $n \geqslant 1$, $a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}$; en faisant $n \to \infty$ on obtient $a \leqslant x \leqslant b$, soit $x \in [a,b]$. D'où

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \Big] a - \tfrac{1}{n},\, b + \tfrac{1}{n} \Big[\;=\; [a,b].$$

Seconde égalité. Si $x \in \bigcup_n [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$, il existe n tel que $a + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant b - \frac{1}{n}$, donc $a < x < b$ (car $\frac{1}{n} > 0$), soit $x \in]a,b[$. Réciproquement, si $x \in]a,b[$, alors $x - a > 0$ et $b - x > 0$; en choisissant n assez grand pour que $\frac{1}{n} \leqslant \min(x - a, b - x)$, on a $a + \frac{1}{n} \leqslant x$ et $x \leqslant b - \frac{1}{n}$, donc $x \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$. D'où

$$\bigcup_{n \geqslant 1} \Big[a + \tfrac{1}{n},\, b - \tfrac{1}{n} \Big] \;=\;]a,b[.$$

3. On note $\mathcal{C} = \{[a,b] : a < b\}$, la famille génératrice de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(a) $\mathcal{B}_1$ **(intervalles ouverts).** Montrons $\sigma(\mathcal{B}_1) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ via la question 1.

- $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{B}_1)$: par la question 2, $[a,b] = \bigcap_{n \geqslant 1}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$, intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}_1$, donc $[a,b] \in \sigma(\mathcal{B}_1)$ et ce pour tout $a < b$.
- $\mathcal{B}_1 \subset \sigma(\mathcal{C})$: par la question 2, $]a,b[= \bigcup_{n \geqslant 1} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$, union dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, donc $]a,b[\in \sigma(\mathcal{C})$ et ce pour tout $a < b$.

Par la question 1, $\sigma(\mathcal{B}_1) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) $\mathcal{B}_2$ **(demi-droites $]-\infty, x]$).**

- $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{B}_2)$: on a $]-\infty, a[= \bigcup_{n \geqslant 1}]-\infty, a - \frac{1}{n}]$, union dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}_2$, donc dans $\sigma(\mathcal{B}_2)$; son complémentaire $[a, +\infty[$ y est donc aussi, et

$$[a,b] =]-\infty, b] \cap [a, +\infty[\;\in\; \sigma(\mathcal{B}_2).$$

- $\mathcal{B}_2 \subset \sigma(\mathcal{C})$: pour $x \in \mathbb{R}$, $]-\infty, x] = \bigcup_{n\geqslant 1}[x-n, x]$, union dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, donc dans $\sigma(\mathcal{C})$.

Par la question 1, $\sigma(\mathcal{B}_2) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(c) $\mathcal{B}_3$ **(demi-droites à extrémité rationnelle).** On a trivialement $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2 \subset \sigma(\mathcal{B}_2)$, donc $\sigma(\mathcal{B}_3) \subset \sigma(\mathcal{B}_2)$.

Montrons l'inclusion réciproque $\mathcal{B}_2 \subset \sigma(\mathcal{B}_3)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons, pour $n \geqslant 1$, $x_n = \lceil nx \rceil / n \in \mathbb{Q}$. Par définition de la partie entière supérieure, $nx \leqslant \lceil nx \rceil < nx+1$, donc

$$x \;\leqslant\; x_n \;<\; x + \tfrac{1}{n},$$

ce qui donne (i) $x_n \geqslant x$ pour tout $n \geqslant 1$, (ii) $x_n \to x$ quand $n \to \infty$, et (iii) par construction $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Montrons que $]-\infty, x] = \bigcap_{n\geqslant 1}]-\infty, x_n]$. Si $y \leqslant x$, alors $y \leqslant x \leqslant x_n$ pour tout n, donc y appartient à l'intersection (cela prouve le sens $\subseteq$). Réciproquement, si $y \leqslant x_n$ pour tout n, en faisant $n \to \infty$ on obtient $y \leqslant x$ (cela prouve l'autre sens). D'où l'égalité, qui montre que $]-\infty, x]$ est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}_3$, donc appartient à $\sigma(\mathcal{B}_3)$.

Ainsi $\mathcal{B}_2 \subset \sigma(\mathcal{B}_3)$, donc $\sigma(\mathcal{B}_2) \subset \sigma(\mathcal{B}_3)$, et finalement $\sigma(\mathcal{B}_3) = \sigma(\mathcal{B}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

En conclusion, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{B}_1) = \sigma(\mathcal{B}_2) = \sigma(\mathcal{B}_3)$.

Exercice 2

Pour $n \geqslant 1$, posons $A_n = \{\omega \in \Omega : P(\{\omega\}) \geqslant \frac{1}{n}\}$.

A_n **est fini, de cardinal au plus** n**.** Supposons par l'absurde que A_n possède $n+1$ éléments distincts $\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}$. Les singletons $\{\omega_i\}$ sont deux à deux disjoints et appartiennent à $\mathcal{F}$, donc par σ-additivité,

$$1 = P(\Omega) \;\geqslant\; P\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1}\{\omega_i\}\Big) = \sum_{i=1}^{n+1} P(\{\omega_i\}) \;\geqslant\; (n+1)\cdot\frac{1}{n} \;>\; 1,$$

ce qui est absurde. Donc $|A_n| \leqslant n$.

Si $\omega \in A$, i.e. $P(\{\omega\}) > 0$, il existe $n \geqslant 1$ tel que $P(\{\omega\}) \geqslant \frac{1}{n}$ (par exemple n tel que $\frac{1}{n} \leqslant P(\{\omega\})$), donc $\omega \in A_n$ (et même dans tous les A_m avec $m \geqslant n$). Ainsi

$$A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n.$$

A est donc une union dénombrable d'ensembles finis (dénombrables donc), donc A est dénombrable.

Exercice 3

Soit X de densité $f(x) = \dfrac{3}{x^4}\mathbf{1}_{\{x\geqslant 1\}}$.

1.

$$E[X^2] = \int_1^{+\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4}\,dx = 3\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = 3\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{+\infty} = 3(0-(-1)) = 3.$$

Comme $E[X^2] = 3 < \infty$, on a $X \in L^2$.

2. Pour $x < 1$, $F_X(x) = 0$ car par lecture de la densité, $X \geqslant 1$ presque sûrement. Pour $x \geqslant 1$ maintenant,

$$F_X(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}\, dt = \Big[-\frac{1}{t^3} \Big]_1^x = 1 - \frac{1}{x^3}.$$

Ainsi $F_X(x) = \Big(1 - \frac{1}{x^3}\Big)\mathbf{1}_{\{x \geqslant 1\}}$. Pour vérifier la cohérence du résultat, il est intéressant de remarquer qu'on a bien $F_X(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$, $F_X(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et que F_X est toujours positive.

3. Posons $Y = 1 - \frac{1}{X^3}$. Puisque $X \geqslant 1$ presque sûrement, $Y \in [0, 1[$ presque sûrement. Ainsi on a immédiatement $F_Y(y) = 0$ pour $y < 0$ et $F_Y(y) = 1$ pour $y \geqslant 1$. Maintenant, pour $y \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leqslant y) &= P\left(1 - \frac{1}{X^3} \leqslant y\right) = P\left(X^3 \leqslant \frac{1}{1-y}\right) \\ &= P\left(X \leqslant (1-y)^{-1/3}\right) = F_X\big((1-y)^{-1/3}\big). \end{aligned}$$

Or $(1-y)^{-1/3} \geqslant 1$ car $y \geqslant 0$, donc

$$F_X\big((1-y)^{-1/3}\big) = 1 - \Big((1-y)^{-1/3}\Big)^{-3} = 1 - (1-y) = y.$$

On a donc $P(Y \leqslant y) = y$ pour tout $y \in [0, 1]$ (et $P(Y \leqslant y) = 0$ pour $y < 0$, $P(Y \leqslant y) = 1$ pour $y > 1$), ce qui est exactement la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. On conclut $Y = 1 - \frac{1}{X^3} \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

Exercice 4

Soit $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

1. Soit $\alpha > 0$ et $Y = U^\alpha$. Comme $U \in]0, 1]$ p.s. donc $Y \in]0, 1]$ p.s et on a F_Y nulle pour $y \leqslant 0$ et $F_Y(y) = 1$ pour tout $y > 1$. Pour $y \in]0, 1]$ maintenant,

$$F_Y(y) = P(U^\alpha \leqslant y) = P\big(U \leqslant y^{1/\alpha}\big) = y^{1/\alpha},$$

car $y^{1/\alpha} \in]0, 1]$ et $F_U(u) = u$ sur $[0, 1]$. En dérivant,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathbf{1}_{\{0<y\leqslant 1\}}.$$

On trouve cette densité en dérivant la FDR, ici c'est légitime car la FDR est **continue** et C^1 **par morceaux**. Les deux propriétés sont nécéssaires, par exemple pour la variable aléatoire ν qui vaut 0 presque sûrement, la FDR de ν que je note F_ν vaut 0 pour tout $x < 0$ et 1 pour tout $x \geqslant 0$, elle est C^1 par morceaux mais **pas** continue et en l'occurence ν n'admet **pas** de densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Remark. J'ai exclu 0 ici pour éviter tout problème avec $y^{1/\alpha - 1}$ mais prendre l'indicatrice de $[0, 1]$ fonctionne aussi car les densités sont égales presque partout pour la mesure de Lebesgue.

Méthode alternative par fonctions test. On peut également retrouver la densité de Y sans passer par la dérivation de la FDR, en montrant directement que pour toute fonction test φ (mesurable positive, continue bornée, ou plus généralement mesurable bornée), $E[\varphi(Y)]$ s'écrit comme l'intégrale de φ contre une certaine fonction : celle-ci sera alors la densité cherchée, par unicité de la densité (à un ensemble Lebesgue-négligeable près).

Soit φ une fonction test. Comme $U \sim \mathcal{U}([0,1])$,

$$E[\varphi(Y)] = E[\varphi(U^\alpha)] = \int_0^1 \varphi(u^\alpha)\, du.$$

On effectue le changement de variable $y = u^\alpha$, soit $u = y^{1/\alpha}$ et $du = \frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1}{\alpha}-1}\, dy$ (c'est un C^1-difféomorphisme de $]0,1]$ dans lui-même car $\alpha > 0$). Les bornes $u = 0$ et $u = 1$ correspondent à $y = 0$ et $y = 1$, donc

$$E[\varphi(Y)] = \int_0^1 \varphi(y)\, \frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1}{\alpha}-1}\, dy.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction test φ, on identifie Y comme admettant pour densité

$$f_Y(y) = \frac{1}{\alpha}\, y^{\frac{1}{\alpha}-1}\, \mathbf{1}_{\{0<y\leqslant 1\}} \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}$$

ce qui redonne bien le résultat obtenu par dérivation de la FDR (ouf!).

Attention! Ne pas oublier qu'une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, ainsi il faut bien penser à ajouter l'indicatrice et préciser que $y \in \mathbb{R}$ quelconque ou alors la définir par morceau de manière adéquate.

2. Soit $\lambda > 0$ et $Z = -\frac{1}{\lambda}\log U$.

Tout d'abord, Z est bien définie presque surement car $U \neq 0$ presque sûrement (pas d'atomes car U admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue). Ainsi $\log U$ est bien définie presque sûrement. Note: log est le logarithme de base e (néperien) ici et pas de base 10.

On a $Z \geqslant 0$ p.s. donc pour tout $z < 0$, $F_Z(z) = 0$. Pour $z \geqslant 0$,

$$F_Z(z) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\log U \leqslant z\right) = P\left(\log U \geqslant -\lambda z\right) = P\left(U \geqslant e^{-\lambda z}\right) = 1 - e^{-\lambda z},$$

car $e^{-\lambda z} \in [0,1]$. Donc $F_Z(z) = (1-e^{-\lambda z})\mathbf{1}_{\{z\geqslant 0\}}$, c'est-à-dire que Z suit la loi exponentielle de paramètre λ, de densité

$$f_Z(z) = \lambda e^{-\lambda z}\, \mathbf{1}_{\{z\geqslant 0\}}.$$

Je répète car c'est important : On trouve cette densité en dérivant la FDR, ici c'est légitime car la FDR est **continue** et C^1 **par morceaux**. Les deux propriétés sont nécéssaires, par exemple pour la variable aléatoire ν qui vaut 0 presque sûrement, la FDR de ν que je note F_ν vaut 0 pour tout $x < 0$ et 1 pour tout $x \geqslant 0$, elle est C^1 par morceaux mais **pas** continue et en l'occurence ν n'admet **pas** de densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Méthode alternative par fonctions test. Comme à la question précédente, on peut retrouver la loi de Z en calculant $E[\varphi(Z)]$ pour une fonction test φ quelconque, plutôt que de dériver la FDR. On a

$$E[\varphi(Z)] = E\Big[\varphi\Big(-\frac{1}{\lambda}\log U\Big)\Big] = \int_0^1 \varphi\Big(-\frac{1}{\lambda}\log u\Big)\, du.$$

On pose le changement de variable $z = -\frac{1}{\lambda}\log u$, soit $u = e^{-\lambda z}$ et $du = -\lambda e^{-\lambda z}\, dz$ (c'est un C^1-difféomorphisme, décroissant, de $]0,1]$ dans $[0,+\infty[$). Quand u décrit $]0,1]$ en décroissant vers 0, z décrit $[0,+\infty[$ en croissant; les bornes sont renversées et compensent le signe $-$ introduit par du, donc

$$E[\varphi(Z)] = \int_0^{+\infty} \varphi(z)\, \lambda e^{-\lambda z}\, dz.$$

Ceci étant vrai pour toute fonction test φ, on identifie

$$f_Z(z) = \lambda e^{-\lambda z}\, \mathbf{1}_{\{z\geqslant 0\}},$$

ce qui confirme, en accord avec le résultat obtenu via la FDR, que $Z \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 5

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, et $\psi(x) = P(X \geqslant x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ pour $x \geqslant 0$.

1. On remarque que $\varphi'(t) = -t\,\varphi(t)$, donc pour $t > 0$, $\varphi(t) = -\dfrac{\varphi'(t)}{t}$. On effectue une intégration par parties sur $\psi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ avec $u(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = -\varphi'(t)$ (donc $v(t) = -\varphi(t)$, $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$) :

$$\psi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t}\big(-\varphi'(t)\big)\, dt = \Big[-\frac{\varphi(t)}{t}\Big]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt.$$

Le terme intégral étant positif, on obtient pour tout $x > 0$:

$$\psi(x) \;\leqslant\; \frac{\varphi(x)}{x} \;=\; \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

2. Posons $G(x) = \psi(x)\, e^{x^2/2}$. Par symmétrie de la Gaussienne centrée, $\psi(x) = P(X \geqslant x) = P(X \leqslant -x)$ (faire un dessin ou un changement de variable $x \to -x$ pour vous en convaincre), ainsi $\psi'(x) = -\varphi(-x) = -\varphi(x)$ par parité de φ. On en déduit

$$G'(x) = \big(-\varphi(x) + x\,\psi(x)\big)\, e^{x^2/2} = e^{x^2/2}\big(x\psi(x) - \varphi(x)\big).$$

D'après la question 1, $x\psi(x) = \varphi(x) - x\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt$, donc

$$x\psi(x) - \varphi(x) = -x\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt \;\leqslant\; 0 \quad \text{pour } x \geqslant 0.$$

Ainsi $G'(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$: G est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

G étant décroissante, $G(x) \leqslant G(0) = \psi(0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$ pour tout $x \geqslant 0$, à nouveau on utilise la symmétrie de la Gaussienne de moyenne nulle pour dire $P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$. D'où

$$\psi(x) \;\leqslant\; \frac{1}{2}\, e^{-x^2/2} \qquad \text{pour tout } x \geqslant 0.$$

3. Notons $M_1(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et $M_2(x) = \dfrac{1}{2} e^{-x^2/2}$ les deux bornes. Leur rapport vaut

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} = \frac{2}{x\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Ce rapport vaut 1 pour $x_0 = \sqrt{2/\pi} \approx 0{,}80$. Donc :

- pour $0 < x < \sqrt{2/\pi}$, on a $M_1(x) > M_2(x)$: la borne de la question 2 ($\frac{1}{2}e^{-x^2/2}$) est la plus fine ;
- pour $x > \sqrt{2/\pi}$, on a $M_1(x) < M_2(x)$: la borne de la question 1 ($\varphi(x)/x$) est la plus fine ;
- de plus, $M_1(x) \to +\infty$ quand $x \to 0^+$ (la borne de la question 1 devient inutilisable près de 0), alors que $M_2(0) = \frac{1}{2} = \psi(0)$ est optimale en $x = 0$.

En résumé, la borne de la question 2 est préférable pour les petites valeurs de x, et celle de la question 1 devient meilleure pour les grandes valeurs de x, dans tous les cas, les deux bornes deviennent très vite très petites.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Supposons X intégrable, donc $E[X] \in \mathbb{R}$ est bien défini. Si X et $X+1$ avaient la même loi, elles auraient en particulier la même espérance (l'espérance ne dépend que de la loi) :

$$E[X] = E[X+1] = E[X] + 1,$$

ce qui donne $0 = 1$, absurde. Donc X et $X+1$ n'ont pas la même loi.

2. On ne suppose plus X intégrable ; on ne peut donc plus utiliser l'espérance. On raisonne sur la fonction de répartition $F = F_X$.

Supposons par l'absurde que X et $X+1$ aient la même loi. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X+1 \leqslant x) = P(X \leqslant x-1) = F(x-1),$$

c'est-à-dire $F(x) = F(x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, autrement dit F est invariante par translation de 1 : $F(y+1) = F(y)$ pour tout y.

Par récurrence, $F(y+k) = F(y)$ (il suffit d'itérer) pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$. Or, F étant une fonction de répartition,

$$\lim_{n \to +\infty} F(y+n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to -\infty} F(y+n) = 0.$$

Mais $F(y+n) = F(y)$ est constante (égale à $F(y)$) le long de ces deux suites, donc ses deux limites doivent valoir $F(y)$ et on obtiendrait $F(y) = 1$ et $F(y) = 0$ simultanément, ce qui est absurde.

Donc X et $X+1$ n'ont pas la même loi, même sans hypothèse d'intégrabilité.